Riv. Mat. Univ. Parma (4) **16** (1990), 213-222

NANDO PRATI (*)

La teoria FAST e l'assioma di induzione in forma finita (**)

Introduzione

Questo articolo è la continuazione di $[3]_1$. La teoria FAST esposta in $[3]_1$ (e $[3]_2$, si veda pure $[3]_3$) è una teoria assiomatica di oggetti che hanno sia connotati propri della teoria dei Fuzzy Sets, sia della Teoria Alternativa degli Insiemi (Alternative Set Theory, AST).

Nella teoria FAST però, come nella teoria alternativa almeno come esposta in [5], si è dato un assioma che è in qualche modo contrario alla intuizione di base della teoria: questo è l'assioma di induzione. Esso dice:

Assioma 8 (Schema di induzione). *Se $\varphi(x)$ è una set-formula allora*

$$(\varphi(\emptyset) \wedge (\forall x \in W)(\forall Y \in \mathrm{El})(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x \cup \{Y\})) \rightarrow (\forall x \in W)\, \varphi(x)$$

cioè se φ è una formula che parla solo di insiemi o di elementi (di insiemi) ed è tale che essa è soddisfatta dal vuoto e, se è soddisfatta da un insieme x allora è soddisfatta da ogni suo set-successore ($x \cup \{Y\}$), allora la formula è soddisfatta da ogni insieme (per una giustificazione di tale insieme e per altre discussioni sulla teoria si veda $[3]_2$).

Questo schema viene assunto per ogni formula, in particolare anche per formule infinite (dal punto di vista di FAST o AST) e cioè anche per formule che per la loro lunghezza non sono materialmente scrivibili. Si vorrebbe quindi sostituirlo con la versione più debole di induzione:

(*) Indirizzo: Via Gabbi 6, I-42100 Reggio Emilia.
(**) Lavoro svolto in parte sotto gli auspici del 40% MURST. – Ricevuto: 23-I-1990.

Assioma 8′ (Schema di induzione finita). *Per ogni formula φ del linguaggio di* FAST *che sia di lunghezza finita e che contenga solo variabili indicate da un numero finito, allora è un assioma*

$$[\varphi(\emptyset) \wedge (\forall x \in W)(\forall Y \in \mathrm{E1})(\varphi(x) \to \varphi(x \cup \{Y\}))] \to (\forall x \in W)\, \varphi(x)\,.$$

Si può notare che l'Assioma 8′ ci permette di ottenere lo stesso tutti i teoremi di FAST poiché, banalmente, i teoremi che sono stabiliti in $[3]_1$ (o $[3]_2$) vengono scritti con (o sono abbreviazioni di) formule soddisfacenti le ipotesi dell'Assioma 8′. Tale assioma non è però formalizzabile, anche perché non si è definita la «corretta» nozione di finitezza (nozione che verrà data solo in seguito, all'interno della teoria) e non è quindi soddisfacente.

È nostra intenzione mostrare qui che lo schema di Assioma 8′ può essere espresso in modo formale con un singolo assioma ad esso metateoricamente equivalente. Ciò facendo, riusciremo anche a dare formalmente la definizione di classe set-definibile, $Sd(X)$.

1 - Mostriamo ora la formulazione equivalente più compatta dell'assioma debole di induzione.

Def. 1. (a) Diciamo che un oggetto è *induttivo* se e solo se ha come elemento il vuoto e per ogni suo elemento che è un insieme contiene anche ogni suo set-successore, in simboli

$$\mathrm{In}\,(X) \quad \text{sta per} \quad X \subseteq W \wedge \emptyset \in X \wedge (\forall x \in X)(\forall Y \in \mathrm{E1})(x \cup \{Y\} \in X)\,.$$

(b) Un oggetto Z è un *GB-oggetto*, in simboli $GB\,\mathrm{og}(Z)$, se e solo se

$$(\forall x)\, x \in Z \wedge (\mathrm{E} \restriction (\mathrm{E1} \times W)) \in Z \wedge (\forall X \in Z)(\mathrm{Dom}\,(X) \in Z \wedge X^{-1} \in Z$$

$$\wedge \{\langle T,\ Y,\ Q\rangle / \langle Y,\ Q,\ T\rangle \in X\} \in Z \wedge (\forall Y \in Z)(X - Y \in Z \wedge X \times Y \in Z)))$$

(il simbolo $\mathrm{F} \restriction X$ sta per «la restrizione di F ad X»).

Si noti che un GB-oggetto non sarà una classe: una classe infatti non può avere per elementi delle altre classi. Il nome di GB-oggetto è giustificato per la somiglianza degli assiomi del gruppo B di NBG [2]: si può anzi facilmente dimostrare che un GB-oggetto soddisfa le proprietà equivalenti a quelle del gruppo B di NBG. Come nel caso classico questo ci permette di sostituire uno schema di assiomi con un numero finito di assiomi anzi, in questo caso con un singolo assioma.

Si noti inoltre che la nozione corrispondente in [4] era la nozione di GB-classe che era data per classi dell'universo esteso. La versione formale compatta dell'Assioma 8′ è:

Assioma 8″. *Esiste un GB-oggetto senza elementi induttivi inclusi in W; in simboli*

$$(\exists Y)(GB\,\mathrm{og}(Y) \wedge (\forall X \in Y)(\mathrm{In}(X) \rightarrow W \subseteq X)).$$

Il resto dell'articolo sarà dedicato a mostrare la versione formale dell'Assioma 8′, a dimostrare l'equivalenza fra questa e l'Assioma 8 ed a dare la definizione di classe set-definibile.

Per la definizione di finitezza si veda $[3]_2$ e si confronti con [5]. In FAST si dimostra che (cfr. $[3]_2$):

(a) Se F è una funzione allora $F \subseteq W$; (b) Se a è un insieme finito allora $U_s(a)$ è finito; (c) Se a e b sono finiti allora $a \times b$ è finito; (d) Se f è una funzione ed è finita allora $\mathrm{Dom}(f)$ e $\mathrm{Cod}(f)$ sono finiti.

Diamo inoltre la seguente

Def. 2. (a) $FW = \{x/x \in W \wedge \mathrm{FIN}(x)\}$, tale classe è la *classe degli insiemi finiti*. (b) $\mathrm{FN} = \mathbb{N}/FW$.

Come in [5] (e $[3]_2$) si può dimostrare il seguente

Teorema 3. (a) *FW è una classe induttiva ed è inclusa in ogni oggetto induttivo.* (b) (*Ricursione finita*) *sia G una funzione tale che* $\mathrm{Dom}(G) = FW$, *allora esiste una funzione F tale che* $\mathrm{Dom}(F) = \mathrm{FN}$ *e* $(\forall n) F(n) = G(F\restriction n)$.

Il punto (b) è l'equivalente su FW del teorema di ricursione che era stato dimostrato in FAST su tutto W (si confronti [5]), e per oggetti set-definibili. Si noti che: (i) la ricursione finita è valida per ogni funzione G (non necessariamente set-definibile) e solo per i numeri naturali finiti; (ii) la dimostrazione del teorema precedente non utilizza l'assioma di induzione ma solo la definizione di FN ed FW. Grazie a questo teorema è possibile stabilire all'interno di FW gli analoghi dei teoremi stabiliti per induzione su W. In particolare è possibile dare definizioni per ricursione (finita) all'interno di FW indipendentemente dalla assunzione dell'assioma di induzione.

Per riuscire nei nostri intenti è necessario introdurre all'interno di FW le nozioni di linguaggio, formula, soddisfazione ecc., occorre cioè rifare una gödelizzazione all'interno di FW. Faremo ciò seguendo una strada diversa da quella seguita in [4] e da quella delineata in [5]: infatti la seconda presenta dei problemi all'interno di AST (anche se è praticabile in FAST) mentre la prima ci appare più complessa del necessario. Il metodo che seguiremo si può applicare comunque anche in AST. Per brevità ci limiteremo a mostrare la gödelizzazione delle set-formule poiché per le formule generali la presenza nel linguaggio dell'operatore di astrazione comporta alcune definizioni più lunghe (ma non concettualmente più difficili). Lavorando all'interno di FW le dimostrazioni si basano sul teorema precedente e sulle sue conseguenze: si lavora cioè nella teoria «FAST-induzione».

Convenzione. Supponiamo di avere ampliato il linguaggio di FAST aggiungendo come costanti tutti gli insiemi e due predicati unari, $\mathscr{W}$, $\mathscr{E}$, rispettivamente per gli insiemi e per gli elementi.

Si noti che tale ampliamento del linguaggio non altera sostanzialmente la teoria. Per la definizione di set-formula si veda $[3]_1$.

Convenzione. Avendo notato in $[3]_1$ che è possibile ridurre la appartenenza quaternaria ad una binaria, per le set-formule useremo, nel seguito, una appartenenza binaria per comodità.

Def. 4. (a) I simboli $\in$, $\equiv$, $\wedge$, $\neg$, $\exists$,), (, $\mathscr{W}$, $\mathscr{E}$, sono rispettivamente codificati dagli insiemi: $\langle 0,\ 0\rangle$, $\langle 1,\ 0\rangle, \ldots, \langle 8,\ 0\rangle$.

(b) La variabile X_ε per gli oggetti è codificata da $\langle \varepsilon,\ 1\rangle$ per ogni $\varepsilon \in \mathrm{N}$; $\mathrm{Var} \equiv \{\langle \varepsilon,\ 1\rangle / \varepsilon \in \mathrm{N}\}$.

(c) La costante a è codificata da $\langle a,\ 2\rangle$, per ogni $a \in W$; la *classe delle costanti di insieme* è $\mathrm{cost} \equiv \{\langle a,\ 2\rangle / a \in W\}$.

(d) L'*alfabeto* è la classe $\mathrm{Alfa} \equiv \{\langle n,\ 0\rangle / n \leqslant 8\} \cup \mathrm{Var} \cup \mathrm{cost}$.

(e) Un insieme f è una *parola* se e solo se è una funzione di dominio un numero naturale a valori in Alfa: la classe delle parole è Word; per ogni parola f la *lunghezza* di f è $\mathrm{lung}(f) \equiv \mathrm{Dom}(f)$.

(f) La *concatenazione* di due parole f e g è la parola h tale che $\mathrm{Dom}(h) \equiv \mathrm{Dom}(f) + \mathrm{Dom}(g) \wedge (\forall \varepsilon)[(\varepsilon \in \mathrm{Dom}(f) \rightarrow h(\varepsilon) \equiv f(\varepsilon)) \wedge (\forall \beta \in \mathrm{Dom}(g))(\varepsilon \equiv \beta + \mathrm{Dom}(f) \rightarrow h(\varepsilon) \equiv g(\beta))]$, in simboli $h = f \oplus g$.

(g) Date due parole v e w, v è una *sottoparola* di w se e solo se $\mathrm{Dom}(v) \subseteq \mathrm{Dom}(w) \wedge (\exists \varepsilon \in \mathrm{Dom}(w)) \quad ((\varepsilon + \mathrm{Dom}(v)) \leqslant \mathrm{Dom}(w) \wedge (\forall \beta \in \mathrm{Dom}(v))$ $(v(\beta) \equiv w(\varepsilon + \beta)))$; la classe delle sottoparole di w è $\mathrm{SW}(w)$.

(h) Una parola v è *finita*, in simboli $\mathrm{fin}(v)$, se e solo se $\mathrm{FIN}(\mathrm{Dom}(v)) \wedge \mathrm{Cod}(v) \subseteq (\{\langle \varepsilon, 1\rangle / \varepsilon \in \mathrm{FN}\} \cup \mathrm{cost} \cup \{\langle n, 0\rangle / n \leqslant 8\})$.

Dalle definizioni e dal fatto che, data una parola v, $\mathrm{SW}(v) \subseteq \mathrm{P}_s(\mathrm{Dom}(v) \times \mathrm{Cod}(v)$, si ha banalmente

Teorema 5. (a) *Se f è una parola allora* $\mathrm{Cod}(f) \subseteq W$. (b) $\mathrm{fin}(v) \rightarrow \mathrm{FIN}(\mathrm{SW}(v))$.

Si nota immediatamente che (si vedano le definizioni in $[3]_2$): data una set-formula φ del linguaggio, finita di s-altezza 0, esiste una parola f che è una sua trascrizione formale. Per esempio la trascrizione della formula $(WY_n \wedge WY_m \wedge Y_n \equiv Y_m)$, è $\{\langle 0, \langle 6, 0\rangle\rangle, \langle 1, \langle 7, 0\rangle\rangle, \langle 2, \langle n, 1\rangle\rangle, \langle 3, \langle 2, 0\rangle\rangle, \langle 4, \langle 7, 0\rangle\rangle, \langle 5, \langle m, 1\rangle\rangle, \langle 6, \langle 2, 0\rangle\rangle, \langle 7, \langle n, 1\rangle\rangle, \langle 8, \langle 1, 0\rangle\rangle, \langle 9, \langle m, 1\rangle\rangle, \langle 10, \langle 5, 0\rangle\rangle$; e così via. Si può quindi definire la classe delle set-formule formali fornendo assieme la nozione di s-altezza come segue

Def. 7. *La classe delle set-formule formali di s-altezza* 0, $\mathrm{SF}(0)$, è la classe delle parole che sono una trascrizione di una set-formula di s-altezza 0.

La definizione data sopra può essere precisata formalmente in modo ovvio, come nel precedente esempio: lasciamo tale semplice seppur lungo compito al lettore.

Teorema 8. (a) $(\forall v \in \mathrm{Word})(\mathrm{fin}(v) \rightarrow \mathrm{FIN}(\mathrm{SW}(v) \cap SF(0))$. (b) *Per ogni parola finita v esiste una funzione* F *tale che per ogni ε, se $\varepsilon > 0$, $F(\varepsilon)$ è la classe delle sotto-set-formule formali di v, di s-altezza ε.*

Dim. (a) Ovvia. (b) Fissata la parola finita v, considero la classe

$$G \equiv \{\langle \emptyset, f\rangle / f \in \mathrm{SW}(v) \cap \mathrm{SF}(\emptyset)\} \cup \{\langle h, f\rangle / \mathrm{Fnc}(h) \wedge f \in \mathrm{SW}(v) \wedge (\exists \alpha \in \mathbb{N})(\alpha > 0$$

$$\wedge \mathrm{Dom}(h) \equiv \alpha + 1 \wedge \alpha \leqslant \mathrm{Dom}(v) \wedge (\exists g \in h(\alpha - \beta))(\exists i \in h(\beta)) f \equiv "(g \wedge i)"$$

$$\vee (\exists g \in h(\alpha)) f \equiv "(\neg g)" \vee (\exists x \in \mathrm{Var})(f \equiv "((\exists x)(Wx \wedge g))" \vee f \equiv "((\exists x)(\mathscr{E}x \wedge g))"\}$$

dove con le virgolette indichiamo la formalizzazione (come nel precedente esempio) della formula scritta fra esse. La tesi ora si ottiene per il Teorema 3.

La definizione precedente ha senso poiché in FAST non si hanno tutte le restrizioni che si hanno invece in AST.

Def. 9. (a) Per ogni parola finita v *la classe delle sotto-set-formule formali finite di s-altezza* ε *di* v è $\mathrm{SSFF}(\varepsilon, v) \equiv F(\varepsilon)$ (dove F è la funzione che si ottiene per il teorema precedente. (b) La *classe delle set-formule formali finite è* $\mathrm{SFF} \equiv \{f/(\exists v, \varepsilon)(v \in \mathrm{Word} \wedge \mathrm{fin}(v) \wedge f \in \mathrm{SSFF}(\varepsilon, v))\}$.

Naturalmente $(\forall f)(\forall v, v', \varepsilon, \varepsilon')((f \in \mathrm{SSFF}(\varepsilon, v) \wedge f \in \mathrm{SSFF}(\varepsilon', v')) \rightarrow \varepsilon = e')$.

Def. 10. (a) Per ogni parola $f \in \mathrm{SF}$, la *s-altezza formale* di f, in simboli $\mathrm{Salt}(f)$, è il minimo naturale ε tale che $(\exists v) f \in \mathrm{SFF}(\varepsilon, v)$. (b) Presa una classe C, $C \subseteq W$, $SF_C \equiv \{f/f \in SF \wedge \mathrm{Cod}(f) \cap \mathrm{Cost} \subseteq \{\langle x, 2\rangle / x \in \mathrm{C}\}\}$, cioè $\mathrm{SF_C}$ è la classe delle set-formule finite in cui la classe delle costanti è $\{\langle x, 2\rangle / x \in \mathrm{c}\}$.

Speriamo con quanto mostrato finora di avere convinto il lettore che è possibile dare liberamente in FW le definizioni per ricursione (finita). Da ora in poi quindi, quando dovremo definire per ricursione un concetto accenneremo semplicemente alla definizione precisa. Come in [1] si può ora dare per ricursione (finita) la definizione di insieme delle variabili libere di una formula $f (f \in \mathrm{SF_C})$; sia $\mathrm{Lib}(f) = \{n \in \mathbb{N} /$ la variabile $\langle n, 1\rangle$ è libera in $f\}$. Essendo la formula f finita si ottiene subito che $|\mathrm{Lib}(f)| \in \mathrm{FN}$. Si supporrà data anche la definizione di proiezione i-esima del prodotto cartesiano n-esimo (con $1 \leqslant i \leqslant n$) di una classe $A \subseteq FW$, che indicheremo con p_i^n. Si noterà che un elemento di A^n essendo una coppia cartesiana è un insieme.

Convenzione. Da ora in poi utilizzeremo per comodità, la notazione usuale per le formule al posto della loro formalizzazione in funzioni. Si dovrà comunque intendere sempre, a meno che non sia altrimenti specificato, che quando scriveremo una formula, questa sta al posto della sua formalizzazione con funzioni. Ometteremo poi sempre le parentesi più esterne alla formula come è uso corrente.

Sempre per ricursione finita sul numero delle variabili libere di insieme o di elemento, si può ora dare la definizione di «la parola $f \in SF_C$ è soddisfatta dall'insieme $c \in \mathrm{E1}^k$», in simboli $\ulcorner f \models c \urcorner$. Per esempio: se $f \in SF_C$ e $c \equiv \langle c_1, \ldots, c_n \rangle$, definiamo:

(a) se f è $(WX_i \wedge WX_j \wedge X_i \equiv X_j)$ allora $\ulcorner f \models c \urcorner$ se e solo se $\mathrm{Lib}(f) \subseteq n$ e $(p_i^n(c) \in W \wedge p_j^n(c) \in W \wedge p_i^n(c) \equiv p_j^n(c))$;

(b) se f è $(\mathcal{E}X_i \wedge \mathcal{E}X_j \wedge X_i \equiv X_j)$ allora $\ulcorner f \models c \urcorner$ se e solo se $\mathrm{Lib}(f) \subseteq n$ e $(p_i^n(c) \in \mathrm{E1} \wedge p_j^n(c) \in \mathrm{E1} \wedge p_i^n(c) \equiv p_j^n(c))$;

(c) se f è $(\mathcal{E}X_i \wedge X_i \equiv a)$ con $a \in W$, allora $\ulcorner f \models c \urcorner$ se e solo se $\mathrm{Lib}(f) \subseteq n$ e $(p_i^n(c) \in \mathrm{E1} \wedge p_i^n(c) \in a)$.

Si può quindi dimostrare metateoricamente per ricursione (finita) che esiste una biiezione (metateorica) $\tilde{}$ fra la classe delle set-formule del linguaggio ed SF_W tale che alla set-formula φ viene associata la parola $\varphi^\sim$. Si può anzi dimostrare che:

$$\varphi(x) \leftrightarrow \ulcorner \varphi^\sim \models x \urcorner .$$

Da ciò si deduce che l'Assioma 8′ è metateoricamente equivalente a

Assioma 8‴. (Induzione debole formale)

$$(\forall f \in SF_W)((\ulcorner f \models \emptyset \urcorner \wedge (\forall x, \ Y)(\ulcorner f \models x \urcorner \to \ulcorner f \models x \cup \{Y\} \urcorner)) \to (\forall x) \ulcorner f \models x \urcorner)$$

(o equivalentemente a

$$(\forall f \in SF_W) \ulcorner (f \models \emptyset \wedge (\forall x, \ Y)(f \models x \to f \models x \cup \{Y\})) \to (\forall x) f \models x) \urcorner) .$$

Def. 11. (a) Una classe X verrà detta *simbolicamente set-definibile*, o più brevemente *set-definibile*, SD(X), se e solo se esiste una funzione $f \in \mathrm{SF}_W$, tale che $X \equiv \{x/x \in \mathrm{E1} \wedge \ulcorner f \models x \urcorner\}$. (b) Chiamiamo $\mathrm{Sat} \equiv \{\langle \varphi, \ \langle a_1, \ldots, a_k \rangle\rangle / \varphi \in SF_W \wedge \ulcorner \varphi \models \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \urcorner\}$.

Ovviamente $\mathrm{Sat} \subseteq FW$.

Teorema 12. (a) $(\exists X)(GB\,\mathrm{og}(X) \to \mathrm{E1}(\mathrm{E} \upharpoonright \mathrm{E1} \times W))$. (b) *Se esiste un GB-oggetto* $\mathcal{G}$, *detta* $\mathcal{S} \equiv \{X/X \equiv \mathrm{Sat}[\varphi]\}$ *abbiamo* $GB\,\mathrm{og}(\mathcal{S}) \wedge (\forall X)(GB\,\mathrm{og}(X) \to \mathcal{S} \subseteq X)$.

Dim. (a) ovvia dalla definizione. (b) La assunzione che esista un GB-oggetto è necessaria affinché le varie classi $\mathrm{E}\upharpoonright(\mathrm{El}\times W)$ siano degli elementi. Vediamo che $\mathcal{S}$ è un GB-oggetto.

Si verifica immediatamente che: (i) per ogni $a\in W$, $a\equiv \mathrm{Sat}[\mathscr{E}X_1\wedge X_1\in a]$;

(ii) la classe $\mathrm{E}\upharpoonright(\mathrm{El}\times W)\equiv \mathrm{Sat}[\mathscr{E}X_1\wedge WX_2\wedge X_1\in X_2]$;

(iii) $\mathrm{Dom}(\mathrm{Sat}[\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_k)])\equiv \mathrm{Sat}[(\exists X_2,\ldots,X_K)(\mathscr{E}X_1\wedge\ldots\wedge\mathscr{E}X_k\wedge\varphi(X_1,\ldots,X_k)]$, e se φ è una set-formula allora $(\exists X_2,\ldots,X_k)(\mathscr{E}X_1\wedge\ldots\wedge\mathscr{E}X_k\wedge\varphi(X_1,\ldots,X_k)]$ è una set-formula;

(iv) con la scrittura $\varphi(X_2, X_1)$ indichiamo la stessa formula $\varphi(X_1, X_2)$ dove però si intende che la prima variabile è X_1 e la seconda X_2; si ha allora $(\mathrm{Sat}[\varphi(X_1, X_2)])^{-1}\equiv \mathrm{Sat}[\varphi(X_2, X_1)]$; (v) (con la stessa convenzione) $\mathrm{Sat}[\varphi(X_3, X_1, X_2)]\equiv\{\langle T, Y, Q\rangle/\langle Y, Q, T\rangle\in \mathrm{Sat}[\varphi(X_1, X_2, X_3)]\}$; (vi) $\mathrm{Sat}[\varphi]-\mathrm{Sat}[\psi]\equiv \mathrm{Sat}[\varphi\wedge\neg\psi]$, (se φ e ψ sono set-formule allora $\varphi\wedge\neg\psi$ è una set-formula); (vii) $\mathrm{Sat}[\varphi(X_1,\ldots,X_n)]\times \mathrm{Sat}[\psi(X_1,\ldots,X_k)]\equiv \mathrm{Sat}[\varphi(X_1,\ldots,X_n)\wedge\psi(X_{n+1},\ldots,X_{n+k})]$, dove $\psi(X_{n+1},\ldots,X_{n+k})$ è la formula $\psi(X_1,\ldots,X_k)$, in cui le variabili $X_1,\ldots,X_k$, sono state sostituite simultaneamente dalle variabili (distinte) $X_{n+1},\ldots,X_{n+k}$. Se φ e ψ sono set-formule allora anche $\varphi\wedge\psi$ è una set-formula; inoltre, anche cambiando le variabili in una set-formula come descritto si ottiene ancora una set-formula.

Mostriamo ora per induzione sulla s-altezza delle formule che $\mathcal{S}$ è il minimo GB-oggetto. Sia φ una set-formula di s-altezza 0: se φ è $(\mathscr{E}X_\alpha\wedge WX_\beta\wedge X_\alpha\in X_\beta)$, allora $\mathrm{Sat}[\varphi]\equiv \mathrm{E}\upharpoonright(\mathrm{El}\times W)$ che appartiene ad ogni GB-oggetto. Se invece φ è $(\mathscr{E}X_\alpha\wedge X_\alpha\in a)$, allora $\mathrm{Sat}[\varphi]\equiv a$, che è un insieme e quindi appartiene ad ogni GB-oggetto. Se φ è $(\mathscr{E}X_\alpha\wedge\mathscr{E}X_\beta\wedge X_\alpha\equiv X_\beta)$, allora $\mathrm{Sat}[\varphi]\equiv \mathrm{Id}$, che appartiene ad ogni GB-oggetto per il teorema di Bernays.

Se invece φ è $(\mathscr{E}X_\alpha\wedge WX_\beta\wedge X_\alpha\equiv X_\beta)$, allora $\mathrm{Sat}[\varphi]\equiv \mathrm{Id}\upharpoonright(\mathrm{El}\times W)$. Ma $\mathrm{Id}\upharpoonright(\mathrm{El}\times W)\equiv \mathrm{Id}\cap(\mathrm{Dom}((\mathrm{E}\upharpoonright(\mathrm{El}\times W)^{-1})))^2$ ottenendo la tesi.

Analogamente a queste si prova la tesi per le altre set-formule di s-altezza 0.

Supponiamo di avere dimostrato che per ogni formula ψ di s-altezza $n<m$, $\mathrm{Sat}[\psi]$ appartiene ad ogni GB-oggetto: prendiamo allora una formula φ di s-altezza m.

Se φ è $\neg\psi$ allora $\mathrm{Sat}[\varphi]\equiv \mathrm{El}-\mathrm{Sat}[\psi]$ da cui la tesi per la definizione di GB-oggetto e poiché $\mathrm{El}\equiv \mathrm{Dom}(\mathrm{E}\upharpoonright(\mathrm{El}\times W)$. Se φ è $((\exists X_\alpha)(\mathscr{E}X_\alpha\wedge\psi))$ possiamo supporre $\alpha\equiv 1$ (altrimenti la tesi si può ottenere con una opportuna serie di scambi). In tal caso abbiamo che $\mathrm{Sat}[(\exists X_1)\varphi(X_1,\ldots,X_n]\equiv \mathrm{Dom}(\mathrm{Sat}[\varphi(X_1,\ldots,X_n)]^{-1})$. La tesi è così dimostrata. Se φ è $((\exists X_\alpha)(WX_\alpha\wedge\psi))$ e $\alpha\equiv 1$ allora $\mathrm{Sat}[\varphi]\equiv((\mathrm{Dom}(\psi)\cap W)\times \mathrm{El})\cap \mathrm{Sat}[\psi]$ che si ottiene per le proprietà di GB-oggetto. Se ora φ è $\psi \wedge \nu$, allora $\mathrm{Sat}[\varphi] \equiv \mathrm{Sat}[\psi] \cap \mathrm{Sat}[\nu]$ che si ottiene per il teorema di Bernays.

Possiamo infine dimostrare che

Corollario 13. *Sono equivalenti Assioma* $8'''$ (*esiste un* GB-*oggetto*) *e Assioma* $8''$.

Dim. Sia vero Assioma $8'''$ ed esista un GB-oggetto; se esiste un GB-oggetto allora dal teorema precedente $GB\,\mathrm{og}(\mathcal{S})$. Se è vero l'assioma di induzione debole formale e se $X(\in \mathcal{S})$ è tale che $(\emptyset \in X \wedge (\forall x \in X)(\forall Y)\, x \cup \{Y\} \in X)$, poiché $X \in \mathcal{S}$ significa che esiste una parola finita φ tale che $X \equiv \mathrm{Sat}[\varphi]$: quindi abbiamo

$$(\ulcorner\varphi \models \emptyset\urcorner \wedge (\forall x,\ \ Y)(\ulcorner\varphi \models x\urcorner \rightarrow \ulcorner\varphi \models x \cup \{Y\}\urcorner)\,.$$

Per ipotesi allora $(\forall x)\ulcorner\varphi \models x\urcorner$, cioè $W \subseteq X$.

Viceversa sia vero l'Assioma $8''$ e fissiamo un GB-oggetto Z tale che $(\forall X \in Y)(\mathrm{In}(X) \rightarrow W \subseteq X)$; sia poi $\varphi \in \mathrm{SF}_W$. Supponiamo che sia

$$(\ulcorner\varphi \models \emptyset\urcorner \wedge (\forall x,\ \ Y)(\ulcorner\varphi \models x\urcorner \rightarrow \ulcorner\varphi \models x \cup \{Y\}\urcorner)\,.$$

Allora la classe $X \equiv \mathrm{Sat}[\varphi]$ è induttiva, ma $X \in \mathcal{S}$ che è il minimo GB-oggetto quindi $X \in Z$. Per ipotesi $W \subseteq X$ e la tesi è dimostrata.

Bibliografia

[1] J. L. BELL and M. MACHOVER, *A Course in Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam, 1977.

[2] K. GÖDEL, *The consistency of the continuum hypothesis*, Ann. Math. Studies 3 Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1940.

[3] N. PRATI: $[\bullet]_1$ *A fuzzy alternative set theory*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **14** (1988), 181-191; $[\bullet]_2$ *Una teoria degli insiemi fuzzy ed alternativi*, Tesi di Dottorato di Ricerca in Matematica Univ. di Pisa, 1988; $[\bullet]_3$ *About the axiomatizations of fuzzy set theory*, Fuzzy Sets and Systems, in corso di pubblicazione.

[4] A. SOCHOR, *Metamathematic of alternative set theory* I, Comm. Math. Univ. Carolinae **20** (4) (1979), 697-721.

[5] P. VOPENKA, *Mathematics in the alternative set theory*, Teuber Text, 1979.

Abstract

In questo articolo vogliamo considerare una forma più debole dell'assioma di induzione che si era assunto nella teoria FAST *di* [3]$_1$. *Mostreremo che di tale assioma (dato in modo semiformale) esiste una espressione formale equivalente.*

***