Riv. Mat. Univ. Parma (4) **17** (1991), 191-198

PASQUALE GIOVINE (*)

Nota sulle equazioni costitutive per l'elio superfluido (**)

1 - Introduzione

In questa Nota si riprendono alcune osservazioni contenute in [2], lavoro nel quale l'elio superfluido è considerato come una miscela binaria con vincoli termodinamici. In particolare si perfeziona la scelta delle variabili costitutive in accordo con l'approccio seguito in [1].

Nelle equazioni di bilancio appaiono qui quantità medie e di scostamento piuttosto che quantità peculiari, ma le equazioni stesse sono perfettamente equivalenti alle equazioni postulate in [6], mentre le equazioni costitutive hanno qualche carattere di novità.

2 - Equazioni di bilancio

Le equazioni di bilancio per una miscela binaria con temperatura comune per i costituenti, ricavate in [2] direttamente da quelle proposte in [6], sono le seguenti:

$$
\begin{gathered}
\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v = 0 \qquad \rho\dot{\nu} - \operatorname{div}[\rho\nu(1-\nu)\,w] = \rho\alpha \qquad \rho\dot{v} = \rho b + \operatorname{div} T \\
\rho\nu(1-\nu)\,\dot{w} + \rho\nu(1-\nu)[\operatorname{grad}(v-(1-2\nu)\,w)]\,w \\
= \rho\nu(1-\nu)\,c + \rho\alpha(v-(1-2\nu)\,w) - \rho m - T(\operatorname{grad}\nu) + \operatorname{div} S \\
T = T^T \qquad \rho\dot{\varepsilon} = T\cdot\operatorname{grad} v + \operatorname{div} h + \rho\lambda \\
\rho\dot{\eta} - \operatorname{div} k - \rho(\lambda - \nu(1-\nu)\,c\cdot w)\,\theta^{-1} \geqslant 0
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università, via F. Buonarroti 2, I-56100 Pisa.

(**) Lavoro eseguito con il contributo del MURST (fondi 40% e 60% - 1989).
MR classification: 76T05.– Ricevuto: 26-XI-1990.

dove sono state usate le seguenti quantità: la densità di massa totale

$$\rho \equiv \rho_s + \rho_n\,; \tag{2.2}$$

la densità di produzione di massa α, la concentrazione del componente superfluido

$$\nu \equiv \frac{\rho_s}{\rho}\,; \tag{2.3}$$

le velocità media

$$v \equiv \nu v_s + (1-\nu)\, v_n \tag{2.4}$$

e relativa

$$w \equiv v_n - v_s\,; \tag{2.5}$$

i tensori degli sforzi totale

$$T \equiv T_s + T_n - \rho\nu(1-\nu)\, w \otimes w \tag{2.6}$$

e microstrutturale

$$S \equiv \nu T_n - (1-\nu)\, T_s\,; \tag{2.7}$$

le densità delle forze interne m, delle forze di massa totale

$$b \equiv \nu b_s + (1-\nu)\, b_n \tag{2.8}$$

e relativa

$$c \equiv b_n - b_s\,; \tag{2.9}$$

le densità di energia interna totale

$$\varepsilon \equiv \nu\varepsilon_s + (1-\nu)\,\varepsilon_n + \frac{1}{2}\nu(1-\nu)\, w^2 \tag{2.10}$$

e relativa

$$\zeta \equiv \varepsilon_s - \varepsilon_n\,; \tag{2.11}$$

le densità di entropia totale

$$\eta \equiv \nu\eta_s + (1-\nu)\,\eta_n \tag{2.12}$$

e relativa

$$\xi \equiv \eta_s - \eta_n ; \tag{2.13}$$

i flussi totali di entropia

$$k \equiv \theta^{-1} [h_s + h_n + \rho\nu(1-\nu)\, \xi\theta w] \tag{2.14}$$

e di calore

$$\begin{aligned} h &\equiv h_s + h_n + S^T w + \rho\nu(1-\nu)(\zeta + \frac{1}{2}(1-2\nu)\, w^2)\, w \\ &= \theta k + S^T w + \rho\nu(1-\nu)[\zeta + \frac{1}{2}(1-2\nu)\, w^2 - \theta\xi]\, w ; \end{aligned} \tag{2.15}$$

il tasso di riscaldamento radiante totale

$$\lambda \equiv \nu\lambda_s + (1-\nu)\,\lambda_n + \nu(1-\nu)\, c \cdot w . \tag{2.16}$$

Oltre alle equazioni (2.1), occorrerebbe aggiungere altre tre equazioni, ricavate da quelle proposte in [6] per S, per ζ e per ξ; ma in questo contesto, in cui interessa il modello per l'elio superfluido, servono solamente le (2.1); gli indici n ed s sono usati per annuire alle componenti normale e superfluida dell'elio.

3 - Equazioni costitutive

La scelta di una opportuna espressione costitutiva per m è ampiamente discussa in [2]. Qui sceglieremo un'espressione per la quale la creazione di massa e di quantità di moto sia ininfluente sul bilancio energetico meccanico; tale condizione è assicurata se poniamo

$$m = \frac{1}{2}\alpha(2v - (1-2\nu)\, w) \tag{3.1}$$

in quanto la variazione corrispondente di energia cinetica è esattamente compensata dalla potenza fornita (vedi [2]).

Considerazioni teoriche di meccanica statistica suggeriscono l'annullarsi identico della densità di entropia specifica per il componente superfluido della miscela (vedi [5], p. 282)

$$\eta_s \equiv 0 ; \tag{3.2}$$

ne segue che

$$\eta = (1 - \nu)\,\eta_n \qquad \xi = -\,\eta_n\,. \tag{3.3}$$

Osserviamo ora che la distinzione, nell'elio superfluido, di due componenti cinematicamente separati è solamente di carattere formale e quindi appare difficile pensare che su di essi agiscano azioni a distanza distinte; perciò supporremo che

$$b_s = b_n \qquad \lambda_s = \lambda_n \tag{3.4}$$

cioè

$$c = 0 \qquad \lambda = \lambda_s = \lambda_n\,. \tag{3.5}$$

Quando si fa uso delle ipotesi (3.1) e $(3.5)_1$ nell'equazione di bilancio $(2.1)_4$ e si elimina $\rho\alpha$ attraverso l'equazione $(2.1)_2$, si ottiene la seguente relazione

$$\rho\nu(1-\nu)\,\dot{w} + \frac{1}{2}\rho(1-2\nu)\,\dot{\nu}w + \rho\nu(1-\nu)(\operatorname{grad} v)\,w \tag{3.6}$$

$$= \operatorname{div}\left[S + \frac{1}{2}\rho\nu(1-\nu)(1-2\nu)\,w \otimes w\right] + \frac{1}{2}\rho\nu(1-\nu)(1-2\nu)(\operatorname{grad} w)\,w - T_I \operatorname{grad}\nu$$

dove la parte interna T_I del tensore degli sforzi è così definita

$$T_I \equiv T_s + T_n\,; \tag{3.7}$$

ma allora la condizione dell'annullarsi identico di c implica una restrizione alla classe di processi ammissibili per l'elio superfluido, in particolare la (3.6) rappresenta un vincolo per la velocità relativa w.

C'è inoltre l'ipotesi che la concentrazione ν sia una variabile costitutiva; in particolare ν va supposta nota una volta assegnati i valori di ρ, θ e w^2; precisamente si ritiene che esista una funzione $\hat{\nu}$ tale che

$$\nu = \hat{\nu}(\rho, \theta, w^2)\,. \tag{3.8}$$

La presenza del vincolo (3.6) implica che le quantità che, in assenza di vincoli, sono individuate da una equazione costitutiva sono ora somma di un componente attivo e di uno reattivo, dei quali solo il primo è individuato ancora da indicazioni costitutive. La richiesta che il vincolo sia perfetto si trascrive nella condizione che i contributi dei componenti reattivi alla disuguaglianza $(2.1)_7$ siano identicamente nulli, per tutti i processi ammessi dai vincoli.

4 - Disuguaglianza ridotta di Clausius-Duhem

La versione ridotta della disuguaglianza $(2.1)_7$, ottenuta in [2] con l'ausilio delle equazioni $(2.1)_6$, $(2.15)_2$ e (3.6), fa intervenire la densità di energia libera ψ nella seguente forma

$$\psi \equiv \varepsilon - \theta\eta - \frac{1}{2}\nu(1-\nu)\,w^2; \tag{4.1}$$

la disuguaglianza si scrive così

$$\begin{aligned} &\rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) - T_I \cdot (\operatorname{grad} v + w \otimes \operatorname{grad} \nu) - S \cdot \operatorname{grad} w \\ &\qquad -k \cdot \operatorname{grad}\theta + \operatorname{div}\,[\rho\nu(1-\nu)(\zeta - \theta\xi)\,w] \leqslant 0\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Assumendo anche in questo lavoro l'ipotesi semplificativa che ζ sia identicamente nulla

$$\zeta = 0 \tag{4.3}$$

si possono applicare le conseguenze delle reazioni vincolari, conseguenze indicate nel paragrafo precedente, ai campi ψ, η, T_I, S e k; in particolare si ha che

$$\psi = \psi^a + \psi^r \qquad \eta = \eta^a + \eta^r \qquad T_I = T_I^a + T_I^r \qquad S = S^a + S^r \qquad k = k^a + k^r; \tag{4.4}$$

inoltre i componenti attivi dipendono, oltre che dalle variabili costitutive ρ, θ e $\operatorname{grad}\theta$ indicate in [2], anche da

$$\omega \equiv \frac{1}{2}\nu(1-\nu)\,w^2. \tag{4.5}$$

La scelta delle variabili costitutive non è univoca: mentre in [5], in un contesto più generale, si pone la dipendenza da w piuttosto che da ω, in [3] e [4] si preferisce proporre la dipendenza diretta da w^2, alla luce di alcune motivazioni di carattere sperimentale; la scelta di ω qui fatta appare più opportuna, oltre che per la posizione (4.1), in cui ω compare esplicitamente, anche per taluni sviluppi effettuati in [1].

Si ha dunque

$$\begin{aligned} &\psi^a = \hat{\psi}^a(\rho,\ \theta,\ \operatorname{grad}\theta,\ \omega) \qquad \eta^a = \hat{\eta}^a(\rho,\ \theta,\ \operatorname{grad}\theta,\ \omega) \\ &T_I^a = \hat{T}_I^a(\rho, \theta, \operatorname{grad}\theta, \omega) \quad S^a = \hat{S}^a(\rho, \theta, \operatorname{grad}\theta, \omega) \quad k^a = \hat{k}^a(\rho, \theta, \operatorname{grad}\theta, \omega). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Inoltre l'ipotesi di vincolo perfetto richiede che i componenti reattivi diano contributo nullo alla disuguaglianza (4.2), cioè usando le relazioni $(2.1)_5$, (3.3), (3.8) e (4.3), si deve avere

$$\rho(\dot{\psi}^r + \eta^r \dot{\theta}) - T_I^r \cdot D + \rho\nu\theta w \cdot \operatorname{grad} \eta^r \tag{4.7}$$

$$+ [\frac{\partial \nu}{\partial \theta}(\rho\theta\eta^r I - T_I^{rT}) w + (\rho\nu\eta^r w - k^r)] \cdot \operatorname{grad} \theta + \{[\frac{\partial \nu}{\partial \rho}(\rho\theta\eta^r I - T_I^{rT}) + \nu\theta\eta^r I] w\} \cdot \operatorname{grad} \rho$$

$$+ [2\frac{\partial \nu}{\partial w^2}(w \otimes w)(\rho\theta\eta^r I - T_I^r) + \rho\nu\theta\eta^r I - S^r] \cdot \operatorname{grad} w = 0$$

dove si è introdotto il tensore

$$D \equiv \frac{1}{2}(\operatorname{grad} v + (\operatorname{grad} v)^T)\,. \tag{4.8}$$

Ma allora tenendo conto del fatto che $\dot{\theta}$, D, e grad w si possono scegliere arbitrariamente, tutti i componenti reattivi devono annullarsi, eccetto ψ^r che risulta costante; e quindi nel seguito identificheremo i campi incogniti ψ, η, T_I, S e k con le loro parti attive.

La disuguaglianza ridotta residua è così espressa

$$\rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) - T_I \cdot D + [(\rho\theta\eta I - T_I^T) w] \cdot \operatorname{grad} \nu \tag{4.9}$$

$$+ (\rho\nu\theta\eta I - S) \cdot \operatorname{grad} w + (\rho\nu\eta w - k) \cdot \operatorname{grad} \theta + \nu\theta\eta w \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho\nu\theta w \cdot \operatorname{grad} \eta \leqslant 0\,.$$

Sfruttando le relazioni costitutive (3.8) e (4.6) e l'equazione (3.6), si ottengono, oltre alla classica relazione di Gibbs

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{4.10}$$

ed alla indipendenza di ψ dal gradiente di θ

$$\frac{\partial \psi}{\partial(\operatorname{grad} \theta)} = 0 \tag{4.11}$$

le seguenti relazioni per il tensore degli sforzi

$$T_I = -\rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} I - \rho\nu(1-\nu)\frac{\partial \psi}{\partial \omega} w \otimes w \tag{4.12}$$

e quello microstrutturale

$$S = \rho\nu\theta\eta I + \rho\nu(1-\nu)(1-2\nu)\,\frac{\partial\psi}{\partial\omega}(w\otimes w + \frac{1}{2}w^2 I) \tag{4.13}$$

$$+2(w\otimes w)\{\,\frac{d(\rho\nu\theta\eta I)}{dw^2} + \frac{\partial\psi}{\partial\omega}[\,\frac{dS}{dw^2} + (\,\frac{d}{dw^2}(\,\frac{1}{2}\rho\nu(1-\nu)(1-2\nu)))\,w\otimes w]$$

$$+\rho\frac{\partial\nu}{\partial w^2}(1+\frac{\partial\psi}{\partial\omega})(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}I + \nu(1-\nu)\,\frac{\partial\psi}{\partial\omega}w\otimes w)\}$$

ed inoltre le equazioni

$$(4.14)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\,\frac{\partial S}{\partial(\operatorname{grad}\theta)} + \rho\nu\theta\frac{\partial\eta}{\partial(\operatorname{grad}\theta)}\otimes I = 0 \\ &\frac{d}{d\rho}(\rho\nu\theta\eta I) + \frac{\partial\psi}{\partial\omega}[\,\frac{d}{d\rho}(S + \frac{1}{2}\rho\nu(1-\nu)(1-2\nu)\,w\otimes w)] \\ &\quad +\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(1+\frac{\partial\psi}{\partial\omega})[\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}I + \nu(1-\nu)\,\frac{\partial\psi}{\partial\omega}w\otimes w] = 0\,. \end{aligned}$$

Dall'equazione (4.11) segue che anche i campi η, T_I ed S sono indipendenti dal gradiente di θ e quindi la $(4.14)_1$ è identicamente verificata.

L'espressione della disuguaglianza residua è la seguente

$$\{k - [\,\frac{d}{d\theta}(\rho\nu\theta\eta I) + \frac{\partial\psi}{\partial\omega}(\,\frac{d}{d\theta}(S + \frac{1}{2}\rho\nu(1-\nu)(1-2\nu)\,w\otimes w)) \tag{4.15}$$

$$+\rho\frac{\partial\nu}{\partial\theta}(1+\frac{\partial\psi}{\partial\omega})(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}I + \nu(1-\nu)\,\frac{\partial\psi}{\partial\omega}w\otimes w)]^T w\}\cdot\operatorname{grad}\theta \geqslant 0\,.$$

Osserviamo subito che, nel caso in cui le funzioni costitutive siano indipendenti da ω e ν dipenda solo dalla temperatura θ, ritroviamo subito le equazioni (4.6), (4.7) e (4.8) ricavate in [2] per T_I, S, η e ψ.

Un esempio che semplifica notevolmente le espressioni ricavate si ottiene imponendo che l'energia libera ψ non dipenda da ω, in tal caso neanche η, T_I ed S dipendono da ω e le equazioni risultanti sono le seguenti:

$$
\begin{aligned}
&T_I = -\rho^2 \frac{\partial\psi}{\partial\rho} I \\
&S = +\rho\nu\theta\eta I + 2\rho \frac{\partial\nu}{\partial w^2}\left(-\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) w \otimes w \\
&\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\nu\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) = \rho^2 \frac{\partial\nu}{\partial\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} \\
&0 \leqslant \{k + [\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho\nu\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) - \rho^2 \frac{\partial\nu}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}] w\} \cdot \operatorname{grad}\theta .
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Bibliografia

[1] R. J. ATKIN and N. FOX, *A multipolar approach to liquid helium* (II), Acta Mech. **21** (1975), 221-239.

[2] G. CAPRIZ, *Alcune osservazioni sulla Termomeccanica delle miscele binarie*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **169** (1990), 63-71.

[3] R. N. HILLS and P. H. ROBERTS, *On Landau's two-fluid model for helium* (II), J. Inst. Math. Applic. **9** (1972), 56-67.

[4] P. H. ROBERTS and R. J. DONNELLY, *Superfluid mechanics*, Ann. Rev. Fluid Mech. **6** (1974), 179-225.

[5] I-SHIH LIU and I. MÜLLER, *Thermodynamics of mixtures of fluids*, in C. TRUESDELL, RATIONAL THERMODYNAMICS (2ª edizione), Springer-Verlag, Berlin (1984) (Appendice 5a), 264-285.

[6] C. TRUESDELL, *Thermodynamics of diffusion*, Rational Thermodynamics (2ª edizione), Springer-Verlag, Berlin (1984), Lettura 5, 219-236.

Summary

See «Introduzione».

* * *