Riv. Mat. Univ. Parma (4) **17** (1991), 265-270

SALVATORE ANTONUCCI (*)

Costruendo grafi regolari (**)

Introduzione

Un grafo regolare di ordine n e di valenza k si dirà di tipo $R_{n,k}$. Per indicare che il vertice a è adiacente al vertice b scriveremo $a \propto b$; per indicare che a è adiacente ad ogni vertice di S scriveremo $a \propto S$. Inoltre con $\chi(G)$ indicheremo il numero cromatico del grafo G e con $\chi(R_{n,k})$ il numero cromatico di un grafo di tipo $R_{n,k}$. Infine, in tutto l'articolo, quando si parlerà di «un solo grafo» si intenderà a meno di isomorfismi; talvolta, pure, si dirà grafo $R_{n,k}$ in luogo di grafo G di tipo $R_{n,k}$.

Scopo di questo lavoro è la costruzione, ove possibile la classificazione, lo studio di proprietà (come la forte regolarità) e la colorazione (ma non specificatamente) di grafi regolari.

L'operazione del tipo suddetto non è, naturalmente, affrontabile in generale: nemmeno un computer veloce e capace (di memoria) potrebbe effettuare una classificazione dei grafi regolari sottoposti alla sola condizione di essere di ordine n e di valenza k, neanche, naturalmente, se fosse supportato da un software sofisticato.

Effettueremo l'operazione, perciò, introducendo condizioni supplementari e in maniera un pò «random», non avendo la pretesa, in questa sede, di una sistemazione definitiva della matetria. Ciò consentirà di cogliere aspetti vari del problema e, nel contempo, favorirà la scoperta di altrettanti problemi aperti, anche se non saranno pedissequamente elencati.

(*) Indirizzo: Via Piave, 4 Parva Domus, Isol. 15, I-80126 Napoli.
(**) MR classification: 05C35. – Ricevuto: 29-IV-1991.

1 - Grafi $R_{n,n-2}$

Cominciamo con il prendere in considerazione il caso $k = n - 2$, n, naturalmente, essendo pari, essendo impossibile che n e k siano entrambi dispari, dal momento che nk è uguale al doppio del numero degli spigoli [1].

Si ha il seguente

Teorema 1. *Esiste un solo grafo $R_{n,n-2}$, con n pari. Si ha $\chi(R_{n,n-2}) = n/2$. Il grafo è fortemente regolare con parametri $c = n - 4$ e $d = n - 2$* (1).

Dim. (per induzione). È ovvio che l'unico grafo $R_{4,2}$ è il ciclo di lunghezza 4.

Denotato, poi, con $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'insieme dei vertici di un grafo $R_{n,n-2}$, sia G, si abbia $1 \propto V'$, con $V' = V - \{1, n\}$; ne consegue che $n \propto V'$; allora $G' = G - 1 - n$ (cioè il grafo che si ottiene da G eliminando 1, n e gli spigoli che hanno uno estremo in essi, ovvero il sottografo di G generato da $2, 3, \ldots, n-1$) è un grafo G' di tipo $R_{n-2,n-4}$.

L'ipotesi di induzione consiste nell'affermare che G' è univocamente determinato a meno di isomorfismi (2).

Si ha, pure, facilmente, che $\chi(G) = \chi(G') + 1$; perciò essendo $\chi(R_{4,2}) = 2$, segue che $\chi(R_{n,n-2}) = n/2$. Infine, $R_{4,2}$ è fortemente regolare con parametri $c = 0$ e $d = 2$. Siano, allora, x e y vertici di G.

Se $x \propto y$, detti x' e y' due vertici non adiacenti di G e posto $G' = G - x' - y'$, si possono dare i seguenti due casi:

(a) $x \notin G'$ e $y \in G'$; in tal caso esistono $n - 4$ vertici di G' adiacenti a y, perchè G' ha valenza $n - 4$ e questi stessi sono adiacenti anche a x;

(b) se $x \in G'$ e $y \in G'$, risultano adiacenti ad entrambi $n - 6$ vertici di G', se si ritiene valida l'ipotesi d'induzione, più i vertici x' e y';

se, invece, x non è adiacente a y, allora gli $n - 2$ vertici di G'', posto che sia $G'' = G - x - y$, sono adiacenti ad entrambi, tenuto conto che G'' è un $R_{n-2,n-4}$. Il teorema segue.

---

(1) Se G è fortemente regolare, c è il numero dei vertici adiacenti a due vertici adiacenti, d quello dei vertici adiacenti a due vertici non adiacenti.

(2) Un grafo $R_{n,n-2}$ può pensarsi anche ottenuto da K_n elimando un accoppiamento perfetto, secondo un'osservazione fatta dall'Autore in [1]; si otteneva, così, per altra via, il risultato espresso dal Teorema 1, relativamente al numero cromatico.

Andiamo, ora, a prendere in esame il caso $n = 2k$.
Vale, in proposito, il seguente

Teorema. 2. *Se un grafo G di tipo $R_{2n,n}$ contiene una clique K_n', allora esso contiene una clique K_n'' tale che*

$$G = K_n' \oplus K_n'' \ (^3).$$

Si ha $\chi(G) = n$ e G non è fortemente regolare.

Dim. Sia K_n' la clique contenuta in $R_{2n,n}$ e siano $1, 2, \ldots, n$ i vertici di $R_{2n,n}$ che non sono vertici di K_n'. Poichè ognuno dei vertici $1, 2, \ldots, n$ ha grado n, deve essere collegato con uno almeno dei vertici di K_n'; essendo i vertici di K_n' in numero di n ed avendo, nella clique, localmente, grado $n-1$, è impossibile che uno stesso vertice i sia adiacente a due vertici di K_n'; naturalmente, poi, ogni vertice di K_n' è collegato con uno solo dei vertici $1, 2, \ldots, n$. Ciò completa la dimostrazione, se si osserva che ognuno dei vertici $1, 2, \ldots, n$ dovrà essere collegato con ognuno di essi stessi, mentre sono ovvie le affermazioni relative al numero cromatico ed alla non forte regolarità.

È banale il seguente

Teorema 3. *Un grafo $R_{2n,n}$ non contiene alcuna clique K_{n+1}, nemmeno se sconnesso.*

Infatti in vertici di un $R_{2n,n}$ che non sono vertici di K_{n+1} potranno avere al massimo grado $n-2$.

Per concludere questo paragrafo facciamo la seguente

Osservazione. Se G è un grafo di tipo $R_{2p+2,p}$ con due clique K_p, detti x e y i vertici non appartenenti alle clique possono darsi i seguenti casi (corrispondenti a grafi non isomorfi):

(a) x e y sono adiacenti; x è adiacente a p vertici di una clique e a q vertici dell'altra, mentre y è adiacente a $n-p-1$ vertici della prima e a $n-q-1$ vertici

(3) Se G e G' sono grafi dello stesso ordine con il simbolo $G \oplus G'$, qui ed esclusivamente qui, vorremo intendere il grafo contenente G e G' tale che ogni vertice di G [G'] sia adiacente ad uno e ad un solo vertice di G' [G].

della seconda, $p + q = n - 1$; le due clique sono collegate tra loro da uno spigolo; è facile vedere che $\chi(G) = n$;

(b) x e y non sono adiacenti; come il caso (a), tranne che tener conto che è $p + q = n$; anche in tal caso $\chi(G) = n$.

2 - Grafi regolari senza clique

In questo paragrafo ci occuperemo di grafi regolari senza clique K_3 (e, cioè, senza alcuna clique). Vale, intanto, il seguente

Teorema 4. *Per $n < 2k$ non esiste un grafo $R_{n,k}$ privo di clique.*

Dim. Se $n < 2k$, detti $1, 2, \ldots, n$ i vertici di un $R_{n,k}$, sia $1 \propto \{2, 3, \ldots, k+1\}$; se $x \in \{2, 3, \ldots, k+1\}$, dovendo essere di grado k, anche ammesso che esso sia adiacente ad ognuno dei vertici $k+2, k+3, \ldots, n$, essendo

$$|\{k+2, k+3, \ldots, n\}| = n - k - 1 < k - 1$$

risulterà adiacente ad almeno uno dei vertici $2, 3, \ldots, k+1$. Ciò implica che il grafo considerato contiene una clique K_3, il che completa la dimostrazione.

Si ha, poi, il seguente

Teorema 5. *Per $n = 2k$ esiste un solo grafo $R_{n,k}$ privo di clique. Esso è bipartito e, però, $\chi(R_{2k,k}) = 2$. Inoltre, esso è fortemente regolare con parametri $c = 0$ e $d = k$.*

Dim. Sia 1 adiacente ai vertici $2, 3, \ldots, k+1$ di un $R_{n,k}$; ognuno dei vertici $2, 3, \ldots, k+1$ dovrà, allora, risultare adiacente ad ognuno dei rimanenti vertici $k+2, k+3, \ldots, n$. Ciò, naturalmente, completa la dimotrazione, risultando in modo ovvio il grafo costruito bipartito e fortemente regolare.

In [2] (pag. 290) si osserva che se G è un grafo di ordine n con m spigoli e se $m > [n^2/4]$, allora G contiene una clique K_3; se $m = [n^2/4]$, allora esiste un grafo senza clique K_3.

Se G è un grafo di tipo $R_{n,k}$, allora, essendo $m = nk/2$, si ritrova, con facili calcoli, sia nel caso n pari che nel caso n dispari (4), che, per $k > n/2$, non esiste un grafo di tipo $R_{n,k}$ privo di clique (Teorema 4); per $n = 2k$ si ritrova il Teorema 5, senza però la costruzione e le caratteristiche utili, qui, per quanto segue, e per le considerazioni che saranno fatte in un prossimo lavoro.

Andiamo, ora, a considerare il caso $k=3$.

Da un grafo $R_{6,3}$, considerato un ciclo di lunghezza 4, per esempio il ciclo 1234, si ottiene un grafo $R_{8,3}$ introducendo un vertice sullo spigolo $\{1, 2\}$ ed uno sullo spigolo $\{3, 4\}$ e collegandoli. L'operazione, naturalmente, è ripetibile: si ottengono così grafi $R_{10,3}$, $R_{12,3}$, ecc.

Un grafo $R_{8,3}$ ottenibile in questo modo non è unico, come lo è un grafo $R_{6,3}$ (si parla, è ovvio, di grafi privi di clique); infatti un parallelepipedo è un grafo $R_{8,3}$ non isomorfo al suddetto: basta osservare che, sottraendo uno spigolo qualsiasi al parallelepipedo ed eliminando gli estremi dello spigolo, si ottiene un grafo non isomorfo al grafo $R_{6,3}$ prima considerato, perchè contiene in ogni caso una clique K_3.

Da quanto premesso segue il seguente

Teorema 6. *Per ogni $n \geq 6$ (n pari) esiste un grafo $R_{n,3}$, non univocamente determinato, privo di clique.*

---

(4) Nel caso n pari la disuguaglianza $m > [n^2/4]$ implica $nk/2 > n^2/4$; nel caso n dispari la stessa disuguaglianza implica $nk/2 > (n^2-1)/4$, cioè $n < k + \sqrt{k^2+1}$.

Bibliografia

[1] S. Antonucci: $[\bullet]_1$ *Colorazioni semplici e generalizzate delle cliques private di cicli hamiltoniani e dei grafi regolari*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), 447-456; $[\bullet]_2$ *Su una generalizzazione dei grafi T e sulla regolarità quasi forte*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 13 (1987), 395-400.

[2] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.

[3] F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

[4] M. Gionfriddo, *Sulle colorazioni L_s d'un grafo finito*, Boll. U.M.I. (4), 15-A (1978), 444-454.

[5] F. Speranza, *Colorazioni di specie superiori d'un grafo*, Boll. U.M.I. (4), 12 suppl. fasc. 3 (1975), 53-62.

Summary

See Introduction.

***