

RODOLFO TALAMO (*)

**Sistemi dinamici unicamente ergodici e
distribuzione asintotica (**)**

Sia (x_{in}) , $i \geq n$ una doppia successione di numeri reali mod 1, cioè $0 \leq x_{in} < 1$.

$$\begin{array}{cccc}
 x_{11} & & & \\
 x_{12} & x_{22} & & \\
 x_{13} & x_{23} & x_{33} & \\
 x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

In particolare, se $x_{in} = x_{ik}$ si hanno i primi n termini di una successione semplice (x_n) .

Dato x , $0 < x < 1$ e designata con $|A|$ la cardinalità di A (finita), poniamo $m_x(n) = |\{i | x_{in} < x\}|$, vale a dire il numero degli elementi della successione x_{1n}, \dots, x_{nn} minori o uguali a x . Sia $I = [0, 1]$. Diciamo che una funzione $z(x): I \rightarrow I$ monotona non decrescente con $z(0) = 0$, $z(1) = 1$ è una *funzione di distribuzione asintotica* per (x_{in}) se in tutti i suoi punti di continuità (quasi tutti i punti di I tranne al più un'infinità numerabile) si ha

$$z(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_x(n)}{n}.$$

Esempio 1. Se (x_n) è uniformemente distribuita, dati a, b , $0 \leq a \leq b \leq 1$,

(*) Dip. di Matem., Politecnico di Milano, Via Bonardi 9, 20133 Milano.

(**) Ricevuto l'8.6.1992. Classificazione AMS 58 F 11. Il contenuto di questa nota è essenzialmente quello della conferenza tenuta nelle *Giornate di Geometria Differenziale e Topologia* di Parma.

e detto $A(a, b, n) = |\{i | x_i \in [a, b[, i \leq n\}|$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(a, b, n)}{n} = b - a.$$

Pertanto, nel nostro caso si avrà $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_x(n)}{n} = x$. Allora $z(x) = x$.

Criterio di Weyl. (x_n) è unif. distribuita se e solo se, \forall intero $h \neq 0$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i h x_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{2\pi i h x_1} + \dots + e^{2\pi i h x_n}) = 0.$$

Come immediata applicazione del criterio di Weyl si ha che

Proposizione. Se α è irrazionale, $(n\alpha)$ è uniformemente distribuita mod 1.

Dimostrazione. Si utilizza la nota disuguaglianza

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i h k \alpha} \right| \leq \frac{1}{n |\sin \pi h \alpha|}.$$

Esempio 2. Sia $P(X)$ un polinomio di grado $s \geq 1$. Se ha almeno un coefficiente irrazionale, $(P(n))$ è uniformemente distribuita mod 1.

Osserviamo che il concetto di funzione di distribuzione asintotica è facilmente generalizzabile al caso in cui gli x_{in} sono k -uple di numeri reali x_{in}^1, x_{in}^k con x_{in}^r positivo minore di 1. Nella definizione di $m_x(n)$, x designerà l'estremo superiore di un intervallo aperto k -dimensionale, e la funzione $z(x): I^k \rightarrow I$ sarà una funzione monotona nelle singole variabili che, in tutti i suoi punti di continuità, sarà uguale alla percentuale di punti della successione assorbita dall'intervallo aperto k -dimensionale individuato dal punto di continuità in questione.

Rimaniamo per ora nell'ambito di successioni in I ($k = 1$).

Data una successione (x_{in}) si pongono allora due tipi di *problemi*:

a - accertare se (x_{in}) ha una funzione di distribuzione asintotica

b - determinarla o approssimarla.

Sappiamo che, nel caso in cui la successione sia uniformemente distribuita, la $z(x)$ è l'identità. Naturalmente avranno maggiore interesse i casi in cui $z(x)$ non è banale. Si ha il seguente

Teorema. *Sia (x_{in}) densa in I . Allora possiede una funzione di distribuzione asintotica se e solo se, per ogni h intero, esistono i limiti*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2\pi i h x_{1n}} + \dots + e^{2\pi i h x_{nn}}}{n} = c_h \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{1n}^h + \dots + x_{nn}^h}{n} = \mu_h.$$

In tal caso si ha: $c_h = \int_0^1 e^{2\pi i h x} dz(x)$ $\mu_h = \int_0^1 x^h dz(x)$, dove $z(x)$ è la funzione di distribuzione asintotica cercata (integrale di Stieltjes).

Osservazione. Notiamo che l'esistenza dei c_h è equivalente a quella dei μ_h ; i primi sono i *coefficienti di Fourier-Stieltjes* della $z(x)$, che determinano lo sviluppo di Fourier della funzione periodica $z(x) - x$, poiché $C_n = c_n (2\pi i n)^{-1}$ $n \neq 0$.

Vogliamo ora esaminare in dettaglio il seguente esempio. Sia $\varphi(n) = n \prod_{p/n} (1 - \frac{1}{p})$, dove p varia nell'insieme dei divisori primi di n , la *funzione φ di Eulero*.

Teorema. *La successione $\frac{\varphi(1)}{1}, \dots, \frac{\varphi(n)}{n}$ ammette funzione di distribuzione asintotica.*

Facciamo vedere innanzitutto che la successione data è *densa in I* .

Consideriamo la serie divergente $\sum_p \log \frac{p}{p-1}$, p primo.

Dato un qualunque $x > 0$ ed un $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, si ha, per $p \geq q$, $0 < \log \frac{p}{p-1} < \varepsilon$. Poiché la serie è divergente, diverge pure ogni resto n -esimo: ne segue che almeno una somma parziale è compresa fra $x - \varepsilon$ e $x + \varepsilon$. Ciò implica che i numeri della formula

$$\log \frac{p_1}{p_1 - 1} + \dots + \log \frac{p_n}{p_n - 1} = \log \left[\left(\frac{p_1}{p_1 - 1} \right) \dots \left(\frac{p_n}{p_n - 1} \right) \right]$$

sono densi sull'asse reale positivo. Per la continuità della funzione $\log x$, i loro argomenti, cioè i prodotti $\left(\frac{p_1}{p_1 - 1} \right) \dots \left(\frac{p_n}{p_n - 1} \right)$ sono densi in $[1, \infty]$. Allora i loro inversi, cioè i numeri del tipo $\left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n} \right)$, con p_1, \dots, p_n primi distinti, sono densi in $[0, 1]$.

Per completare la dimostrazione basta osservare che

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) = \frac{\varphi(p_1 \cdot p_2 \dots p_n)}{p_1 \dots p_2 \dots p_n}$$

e che pertanto la successione $\frac{\varphi(n)}{n}$, se $n = p_1 \dots p_n$ è densa in I . Si può allora applicare il criterio di esistenza della funzione di distribuzione asintotica, che segue dal

Lemma. Per ogni numero complesso s si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\varphi(1)}{1}\right)^s + \dots + \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^s}{n} = \phi(s)$$

dove ϕ è una funzione trascendente intera rappresentabile in prodotto infinito $\phi(s) = \prod \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^s\right)$ dove p è primo ed il prodotto converge assolutamente e uniformemente su ogni compatto K di C .

Per s intero, si ha allora che esistono i limiti μ_s , e quindi per il criterio esisterà pure la funzione di distribuzione asintotica.

Esempio 3. Sia $x_{in} = \frac{n}{i}$, $i \leq n$. Allora si può dimostrare che $z(x) = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt$, $z'(x) = \int_0^1 \frac{t^x \log t}{t-1} dt$ (derivando sotto il segno di integrale), $z^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{t^x \log^k t}{t-1} dt$. Sia ora M uno spazio metrico compatto, μ una misura di Borel su M e T un omeomorfismo di M che conserva μ (cioè tale che $\forall E$ di Borel, $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$). Si hanno i seguenti teoremi ergodici

Teorema ergodico debole. Sia f integrabile rispetto alla misura μ . Allora la successione

$$\phi_n(x) = \frac{1}{n} (f(x) + f(T(x)) + \dots + f(T^{n-1}(x)))$$

converge quasi ovunque (in un insieme $S \subseteq M$ di misura 1) ad una funzione $\phi(x)$ integrabile, $\phi(x) = \lim \phi_n(x)$.

Nell'ipotesi suppletiva che gli unici insiemi invarianti rispetto a T (cioè tali che $E = T(E)$) siano di misura 0 oppure 1 si ha il

Teorema ergodico forte. *Nella ipotesi del teorema ergodico debole, si ha che $\phi(x)$ è costante ed uguale all'integrale della f . Cioè $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = \int_M f d\mu$ quasi ovunque in M .*

Corollario. *Se f è la funzione caratteristica di un boreliano E , cioè $f = c_E$, si ha $\int_M c_E d\mu = \mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} c_E(T^i(x))$ per quasi ogni x (cioè indipendentemente da x).*

Questo significa che ogni boreliano E ha una misura che è data dalla percentuale dei punti dell'orbita di quasi ogni x , assorbita da E .

Gli sforzi per migliorare il teorema ergodico si concentrano sulla possibilità di eliminare l'insieme residuale di misura 0.

Kriloff e Bogoljuboff avevano definito il concetto di *omeomorfismo unicamente ergodico* (quando T ammette un'unica misura invariante μ , cioè tale che $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$).

Proprietà 1. *Dato uno spazio metrico compatto M ed un omeomorfismo T , esiste sempre almeno una misura μ invariante rispetto a T .*

Dimostrazione. Segue da un teorema generale di punto fisso per trasformazioni di insiemi compatti convessi.

Proprietà 2. *Se T è unicamente ergodico, è anche ergodico.*

Diciamo *processo* una terna (M, T, μ) dove M e T sono definite come al solito e μ è una misura invariante.

Teorema di Furstenberg. *Il processo (M, T, μ) è unicamente ergodico se e solo se, $\forall f$ continua su M a valori in \mathbb{C} , $\forall x \in X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (f(x) + f(T(x)) + \dots + f(T^{n-1}(x))) = \int_M f d\mu$.*

Si può notare come il teorema di Furstenberg elimini l'insieme residuale di misura nulla, ma faccia anche svanire l'importante significato geometrico-probabilistico del teorema ergodico, cioè la coincidenza fra la misura dei boreliani e la percentuale dei punti dell'orbita da essi assorbita.

Problema. *È possibile, almeno per una classe di spazi metrici compatti, eliminare l'insieme residuale e caratterizzare i sistemi unicamente ergodici con una proprietà di distribuzione asintotica?*

La risposta è positiva, se K^n è il toro n -dimensionale. Ricordiamo che ogni misura μ su K^n definisce in modo naturale una funzione $Z: I^n \rightarrow I$ ponendo, per ogni $x \in I^n$, $z(x) = \mu(Q_x)$, dove Q_x è l'intervallo aperto n -dimensionale individuato da x . Un teorema dimostrato in [7] stabilisce, sugli spazi suddetti, un legame fra sistemi unicamente ergodici e funzioni di distribuzione asintotica.

Teorema (Talamo 1990). *Sia (K^n, T, μ) un processo sul toro n -dimensionale. Esso è unicamente ergodico, se e solo se la funzione z canonicamente associata a μ è una funzione di distribuzione asintotica per le orbite di tutti i punti dello spazio.*

Consideriamo il sistema così definito

$$(1) \quad \dot{\vartheta}_1 = 1 - \gamma \sin 2\pi(\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad \dot{\vartheta}_2 = \omega + \gamma \sin 2\pi(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

dove $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 1] \bmod 1$, ω è fisso nell'intervallo $[0, 1]$ e $\gamma \geq 0$ è un parametro variabile. Tali sistemi derivano dallo studio di oscillatori lineari accoppiati a ciclo limite [2] e [4]. Sia $\Sigma \subset T_2 = S_1 \times S_1$ il meridiano $x = 0$ del toro; consideriamo l'applicazione di Poincaré $P_\gamma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ indotta dal flusso generato dal sistema differenziale in questione. Se poniamo $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \phi$, e $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \psi$, il sistema diventa ovviamente

$$\dot{\phi} = 1 - \omega - 2\gamma \sin 2\pi\phi \quad \dot{\psi} = 1 + \omega.$$

Le condizioni iniziali $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = 0$ diventano rispettivamente $\psi(0) = \vartheta$, $\phi(0) = -\vartheta$. Se $2\gamma < 1 - \omega$, la soluzione del sistema, relativa a tali condizioni iniziali, si può scrivere

$$\phi(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} u(t) \quad \psi(t) = \vartheta + (1 + \omega)t$$

dove

$$u(t) = \frac{1}{1 - \omega} (2\gamma + \sigma \operatorname{tg}(\pi\sigma t + c))$$

$$\sigma = \sqrt{(1 - \omega)^2 - 4\gamma^2} \quad c = -\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sigma} (2\gamma + (1 - \omega) \operatorname{tg} \pi\vartheta) \right).$$

Con calcoli, che qui tralasciamo si può far vedere che l'applicazione di Poincaré assume la forma

$$P_\gamma(\vartheta) = \frac{\vartheta}{2} + \frac{1 + \omega}{\tau} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} u(\tau)$$

dove τ è il tempo richiesto a \mathcal{S}_1 per andare da 0 a 1, vale a dire che τ soddisfa alla relazione

$$1 = \frac{\mathcal{S}}{2} + \frac{1 + \omega}{2} \tau + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} u(\tau).$$

Sorge allora il problema di dare una *rappresentazione esplicita* di $h(\mathcal{S})$ (ad esempio mediante lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $h(\mathcal{S}) - \mathcal{S}$), dove h designa la funzione che coniuga P_γ topologicamente ad una rotazione.

Come diremo più dettagliatamente dopo, si può far vedere che sussiste una formula per il calcolo del numero di rotazione. Noi abbiamo considerato il caso in cui il valore di α è dato dal numero trascendente $\sin 2$ (radianti), le cui prime dodici cifre decimali sono evidenziate in $\alpha = 0.909297426825\dots$

Ricordiamo che la formula esplicita per il calcolo di α è data da

$$\alpha = \frac{1 + \omega - \sigma}{1 + \omega + \sigma}$$

dove ω e γ sono scelti in modo che $2\gamma < 1 - \omega$ e σ è calcolato di conseguenza.

Metodo classico (tramite i *fattori di attenuazione* (Gautschi)). Se si vuole ottenere lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione nota in un insieme discreto di punti $f_k = f(x_k)$ si procede nel modo seguente

a - si interpola la f con una funzione φ che abbia le sue stesse caratteristiche (classe di differenziabilità, ecc.):

b - come valori approssimati dei coefficienti dei $c_j(f)$ si assumono i $c_j(\varphi)$.

Se si considerano le quantità

$$\beta_j(f) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-jix_k}$$

facilmente calcolabili a partire da f , si ha che, per procedimenti di approssimazione molto generali, esistono delle costanti τ_j , che dipendono soltanto dal procedimento di approssimazione dato (e non da f), per cui si ha

$$c_j(\varphi) = \tau_j \beta_j(f).$$

Tali costanti τ_j sono i *fattori di attenuazione*, mediante i quali si calcolano i desiderati coefficienti di Fourier $c_j(\varphi)$.

Gautschi (1982) ha dimostrato che tali fattori di attenuazione esistono, se e solo se il metodo di approssimazione scelto gode di una proprietà geometrica (*è lineare e invariante rispetto alle traslazioni in uno spazio di Hilbert*).

Data l'arbitrarietà della scelta della funzione φ , questo metodo *non permette* una maggiorazione dell'errore nel calcolo dei coefficienti di Fourier.

Nel nostro caso esiste, come ben sappiamo, il numero di rotazione del diffeomorfismo f , cioè $\alpha = \rho(f)$. Abbiamo allora potuto ottenere questo risultato (pubblicato in [5])

Teorema (Pavani-Talamo, 1991). *Sia f un diffeomorfismo di \mathbf{R}/\mathbf{Z} , $x_i = f^i(0)$ l'orbita di 0. Allora la funzione di coniugio topologico $h(x)$, che coniuga f ad una rotazione di ampiezza $\alpha = \rho(f)$ si può esprimere nel modo seguente*

$$h(x) - x = C_0 + \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n x}$$

dove

$$C_0 = \frac{1}{2} - \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_h}{h} \quad C_n = \frac{c_n}{2\pi i n} \quad c_n = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{e^{2\pi i n x_1} + \dots + e^{2\pi i n x_h}}{h}.$$

Inoltre, se $C_n^r = \frac{e^{2\pi i n x_1} + \dots + e^{2\pi i n x_r}}{2\pi i n r}$ si ha $|C_n - C_n^r| \leq \frac{2}{r} + D(r)$, avendo designato con $D(r)$ la discrepanza dei primi r termini della successione $(n\alpha)$. Siccome α è irrazionale e quindi $(n\alpha)$ è uniformemente distribuita, $D(r)$ tende a zero.

Nel caso del sistema (1) esiste una formula esplicita per il calcolo di α ; cioè la (2). Infine, per maggiorare l'errore che si compie, troncando l'espressione dei coefficienti di Fourier all'altezza r , si possono sfruttare i risultati di approssimazione diofantea che danno stime su $D(r)$.

Esempio. Se α ha uno sviluppo in frazione continua limitato, allora $D(r)$ tende a zero come $\frac{1}{r} \log^2 r$.

Bibliografia

- [1] H. FURSTENBERG, *Strict ergodicity and transformations on the torus*, Amer. J. Math. **83** (1961), 573-601.
- [2] W. GAUTSCHI, *Attenuation factors in practical Fourier analysis*, Num. Math. **18** (1972), 373-400.
- [3] J. GUCKENHEIMER and P. HOLMES, *Nonlinear oscillators, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, Springer, Berlin 1990.
- [4] J. C. NEU, *Coupled chemical oscillators*, SIAM J. Appl. Math. **37** (1979), 307-315.
- [5] R. PAVANI and R. TALAMO, *Conjugating the Poincaré's map to a rotation*, Ann. Mat. Pura Appl. **163** (1992).
- [6] I. SCHOENBERG, *Ueber die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1*, Math. Z. **28** (1928), 171-199.
- [7] R. TALAMO, *Uniquely ergodic systems on the torus*, Seminarberichte Hagen **37** (1990), 147-154.

* * *

Finito di stampare il 7 Aprile 1993

Tipografia Compositori Bologna