Riv. Mat. Univ. Parma (5) 1 (1992), 45-50

MARIO PEDRAZZOLI (*)

Coerenza degli operatori causali ed invarianti per traslazione in spazi di distribuzioni (**)

Introduzione

Un circuito elettrico è descritto da equazioni funzionali: le tensioni e le correnti sono rappresentate da funzioni dipendenti dal tempo appartenenti ad uno spazio vettoriale W; le componenti o i vincoli lineari (resistenze, induttanze, trasformatori, transistors, ecc.) sono rappresentati da operatori lineari appartenenti a sottospazi di $\operatorname{End} W$; si noti che anche se le componenti non sono lineari, è ragionavole approssimarle mediante componenti, e quindi operatori, lineari.

La coerenza di spazi di operatori è stata introdotta in [3], ed è di fondamentale importanza nello studio di un circuito, in quanto il verificarsi di tale proprietà risolve il problema che stabilisce se il circuito sia strutturalmente funzionante.

In [3] viene dapprima introdotta la nozione di dipendenza per una famiglia di vincoli lineari appartenenti a K sottoinsieme di $\operatorname{End} W$ e successivamente la nozione di coerenza per tali vincoli. Qualora i vincoli siano indipendenti, le condizioni di coerenza per lo spazio di operatori K assicurano una tipologia di condizioni necessarie e sufficienti affinché si eliminino le anomalie strutturali: la indipendenza dei vincoli non dipende in questo caso dai particolari operatori che rappresentano i vincoli lineari, ma dipende dall'insieme dei rami le cui tensioni e correnti sono interessate dai vincoli.

In questo contesto assume un indubbio rilievo il problema di individuare spazi coerenti di operatori. In [1], verificato che non tutti gli spazi di operatori sono

---

(*) Dip. Territorio e Sistemi Agro-Forestali, Univ. Padova, via Gradenigo 6, 35131 Padova, Italia.

(**) Ricevuto il 3.10.1991. Classificazione AMS 46 F 10.

coerenti, sono ottenuti risultati sulla coerenza di operatori compatti in spazi di Banach, e di operatori integro-differenziali in spazi di funzioni reali derivabili infinite volte.

Nel presente lavoro le correnti e tensioni considerate appartengono a spazi di funzioni generalizzate; viene individuata la coerenza per la classe, particolarmemte significativa in elettronica, degli operatori causali ed invarianti per traslazione in spazi di funzioni generalizzate.

Dapprima gli operatori lineari e continui in spazi di distribuzioni, con la proprietà di essere causali ed invarianti per traslazione, vengono caratterizzati come operatori di tipo convoluzione.

Successivamente, ricordata la definizione di K-dipendenza e di K-coerenza, si dimostra che gli operatori caratterizzati in precedenza soddisfano a tale proprietà.

1 - Nozioni preliminari e notazioni

Sia $D = D(\boldsymbol{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni reali di una variabile reale continue con le loro derivate di ogni ordine e a supporto compatto con la usuale topologia: una successione $(\phi_n(x))$ convege a zero in D, se le ϕ_n hanno il supporto contenuto in un unico insieme limitato di $\boldsymbol{R}$ e se la successione converge uniformemente a zero insieme a tutte le successioni delle derivate di ogni ordine.

Sia D' lo spazio vettoriale delle distribuzioni in $\boldsymbol{R}$, ossia lo spazio dei funzionali lineari e continui su D.

Sia $E = E(\boldsymbol{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni reali di una variabile reale continue con le loro derivate di ogni ordine, con la usuale topologia: una successione $(\phi_n(x))$ converge a zero in E, se essa converge uniformemente a zero su ogni compatto insieme a tutte le successioni delle derivate di ogni ordine.

Sia E' il sottospazio delle distribuzioni in $\boldsymbol{R}$, a supporto compatto.

Si indicherà con $\langle u, \phi\rangle$, o anche con $\langle u_x, \phi(x)\rangle$, il valore che la distribuzione $u \in D'$ assume sulle funzione $\phi \in D$.

In D' si considera la solita struttura di convergenza: una successione (u_n) converge a zero in D', se e solo se, per ogni $\phi \in D$, $\langle u_n, \phi\rangle$ converge a zero.

Siano $\rho \in E'$, $u \in D'$; utilizzando la nozione di prodotto diretto fra ρ ed u, cioè considerando la distribuzione su $\boldsymbol{R}^2$ $\rho \otimes u$ tale che

$$\langle(\rho \otimes u)_{x,y},\ \phi(x,\ y)\rangle = \langle \rho_x, \langle u_y,\ \phi(x,\ y)\rangle\rangle,$$

si definisce il prodotto di convoluzione fra ρ ed u

$$\langle(\rho * u)_x,\ \phi(z)\rangle = \langle(\rho \otimes u)_{x,y},\ \phi(x+y)\rangle = \langle\rho_x, \langle u_y,\ \phi(x+y)\rangle\rangle$$

dove $\phi(z) \in D$, $x, y \in \boldsymbol{R}$, $z = x + y$.

È noto che $\rho * u \in D'$ e che le applicazioni lineari $u \to \rho * u$: $D' \to D'$ e $\rho \to \rho * u$: $E' \to D'$ sono continue.

Sia $\rho \in E'$; si indicherà con $C_\rho: D' \to D'$ l'operatore di convoluzione per ρ, cioè $C_\rho u = \rho * u$, $u \in D'$.

Sia $h \in \boldsymbol{R}$. L'operatore di traslazione T_h sullo spazio vettoriale delle funzioni reali in $\boldsymbol{R}$ è definito da: $T_h f(x) = f(x-h)$, dove $f(x)$ è una funzione reale definita in $\boldsymbol{R}$. L'operatore di traslazione T_h su D' è definito da: $\langle T_h u, \phi\rangle = \langle u, T_{-h}\phi\rangle$ dove $u \in D'$, $\phi \in D$.

2 - Caratterizzazione degli operatori causali ed invarianti per traslazione in spazi di distribuzioni

Definizione 1. Un operatore lineare L: $D' \to D'$ è *invariante per traslazione* se, per ogni $u \in D'$ e per ogni $h \in \boldsymbol{R}$, si ha $L(T_h u) = T_h(Lu)$.

Definizione 2. Un operatore lineare L: $D' \to D'$ è *causale* o *non anticipatorio* se, per ogni $u, v \in D'$ e per ogni $a \in \boldsymbol{R}$, $u = v$ in $]-\infty, a[$ implica $Lu = Lv$ in $]-\infty, a[$.

Sia δ la misura di Dirac nell'origine e $\delta_h = T_h \delta$ la misura di Dirac in h. È noto che $\delta_h * u = T_h u$.

Lemma 1. *Sia L: $D' \to D'$ un operatore lineare continuo ed invariante per traslazione e siano $u, v \in E'$; si ha $L(u * v) = u * Lv = Lu * v$.*

Dimostrazione. Poiché $u \in E'$, esiste (cfr. [4]) una successione di distribuzioni del tipo $u_n = \sum_{j=1}^{m} c_{jn} \delta_{h_{jn}}$, $c_{jn} \in \boldsymbol{R}$, convergente ad u in D'. Si ha allora, per la continuità del prodotto di convoluzione, che $u_n * v$ converge ad $u * v$ in D', e quindi, applicando l'operatore continuo L, che $L(u_n * v)$ converge ad $L(u * v)$ in D'.

D'altra parte, poiché $u_n * v = \sum_{j=1}^{m} c_{jn} T_{h_{jn}} v$, e poiché L è invariante per traslazione, si ha

$$L(u_n * v) = L(\sum_{j=1}^{m} c_{jn} T_{h_{jn}} v) = \sum_{j=1}^{m} c_{jn} T_{h_{jn}}(Lv) = u_n * Lv\,.$$

Pertanto $L(u_n * v)$ converge ad $u * Lv$, e dall'unicità del limite segue che $L(u * v) = u * Lv$. L'uguaglianza $L(u * v) = Lu * v$ si dimostra scambiando u con v.

Lemma 2. *Sia L: $D' \to D'$ un operatore lineare continuo ed invariante per traslazione. Sia $\rho = L\delta$; si ha allora*

$$\text{j)}\ \rho \in E' \qquad \text{jj)}\ Lu = C_\rho u \ \text{per ogni}\ u \in D'.$$

Dimostrazione. La jj) per $u \in E'$, si ottiene applicando il lemma 1. Infatti $C_\rho u = (L\delta) * u = L(\delta * u) = Lu$.

Si supponga per assurdo che sia $\rho \notin E'$. Si consideri il caso in cui il supporto di ρ sia illimitato superiormente; esiste allora una successione di interi (h_j) divergente positivamente, tale che ρ è diversa da zero in ogni intervallo $]h_j, h_j + 2[$, cioè esiste una successione di funzioni $\phi_j \in D$ e con supporto contenuto in $]h_j, h_j + 2[$, tale che $\langle \rho, \phi_j \rangle$ non converge a zero.

Si costruisca ora, a partire da (ϕ_j), una successione di D convergente a zero: le funzioni $\psi_j = T_{-h_j}\phi_j$ hanno il supporto contenuto nell'intervallo $]0, 2[$; d'altra parte si può trovare una successione di numeri reali (ε_j), ad esempio

$$\varepsilon_j = \frac{1}{j}\,\frac{1}{\sup\{|\psi_h|,\ |\psi_h'|,\ \dots,\ |\psi_h^{(j)}|\}} \qquad h = 0, 1, \dots, j-1,$$

in modo tale che (ε_j, ψ_j) converga a zero in E; si ha quindi

$$(1) \qquad (\varepsilon_j \psi_j) \xrightarrow{D} 0.$$

Si consideri la successione di distribuzioni $(M_j \delta_{-h_j})$ dove (M_j) è un'arbitraria successione reale; si vede facilmente che $(M_j \delta_{-h_j})$ converge a zero in D' e, per la continuità di L, si ha che $L(M_j \delta_{-h_j})$ converge a zero in D'; poiché $\delta_{-h_j} \in E'$, si ha che $L\delta_{-h_j} = \rho * \delta_{-h_j}$; quindi

$$(2) \qquad L(M_j \delta_{-h_j}) = M_j(\rho * \delta_{-h_j}) = M_j(T_{-h_j}\rho) \xrightarrow{D'} 0.$$

Da (1) e (2) si ricava che $\langle M_j(T_{-h_j}\rho), \varepsilon_j \psi_j \rangle$ converge a zero e, scegliendo $M_j = \frac{1}{\varepsilon_j}$, si ha che $\langle \rho, \phi_j \rangle$ converge a zero. Quindi $\rho \in E'$.

Il caso in cui il supporto di ρ sia illimitato inferiormente si tratta in modo analogo.

Ora per la densità di E' in D', si vede immediatamente che jj) vale anche per ogni $u \in D'$.

Sia E'_+ lo spazio vettoriale delle distribuzioni a supporto compatto nulle in $]-\infty, a[$.

Teorema 1. *Sia L: $D' \to D'$ un operatore lineare e continuo; condizione necessaria e sufficiente affinché L sia causale ed invariante per traslazione è che sia $L = C_\rho$, per qualche $\rho \in E'_+$, in tal caso ρ è univocamente determinato ed è $\rho = L\delta$.*

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Per il Lemma 2 si ha che $Lu = \rho * u$, con $\rho \in E'$; d'altra parte, essendo L causale si ha $\rho = L\delta \in E'_+$.

La condizione è sufficiente. C_ρ è invariante per traslazione per ogni $\rho \in E'_+$; infatti, per ogni $\phi \in D$ si ha che

$$\langle C_\rho(T_h u), \phi\rangle = \langle \rho * (T_h u), \phi\rangle = \langle \rho_x, \langle u_y, T_{-h}\phi(x+y)\rangle\rangle$$

$$= \langle T_h(\rho * u), \rho\rangle = \langle T_h(C_\rho u), \phi\rangle.$$

C_ρ è causale per ogni $\rho \in E'_+$. Infatti, se $u = 0$ in $]-\infty, a[$, si ha che, per ogni $\phi(x+y)$ a supporto compatto nel sottoinsieme di $\boldsymbol{R}^2$ tale che $x + y < a$, $\langle u_y, \phi(x+y)\rangle = 0$; ma, considerando una funzione $\phi(x+y)$ di $D(\boldsymbol{R}^2)$ con tale supporto, poiché $\operatorname{supp}(\rho \otimes u) = \operatorname{supp}\rho \times \operatorname{supp} u$ è disgiunto dal supporto di $\phi(x+y)$, si ha $\langle \rho * u, \phi\rangle = \langle \rho_x \otimes u_y, \phi(x+y)\rangle = 0$ in $]-\infty, a[$.

3 - Coerenza degli operatori causali ed invarianti per traslazione

Riferendosi ad uno spazio vettoriale W su $\boldsymbol{R}$ e a K, sottospazio di $\operatorname{End} W$, si ricordano le definizioni di K-dipendenza e di K-coerenza.

Definizione 3. Una famiglia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ di elementi di $M(1 \times n; K)$ è *K-dipendente* se esistono $d_1, d_2, \ldots, d_n$ elementi di K non tutti nulli, tali che $d_1 a_1 + \ldots + d_n a_n = 0$.

Definizione 4. Si dice che lo spazio di operatori K è *K-coerente* se per ogni n, $M(1 \times n; K)$ verifica le condizioni

i) esistono n-ple K-indipendenti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ di elementi di $M(1 \times n, K)$

ii) ogni m-pla $a_1, a_2, \ldots, a_m$ di elementi di $M(1 \times m; K)$ con $m > n$ è K-dipendente.

Sia K lo spazio degli operatori lineari, continui, causali ed invarianti per traslazione in D', ossia degli operatori di convoluzione per ρ, con $\rho \in E'_+$.

Teorema 2. *Lo spazio degli operatori K è K-coerente.*

Dimostrazione. Poiché K è chiuso rispetto al prodotto di composizione, K risulta un anello; essendo l'anello K commutativo, con identità e privo di divisori dello zero, K è K-coerente.

Bibliografia

[1] M. Dozio e M. Pedrazzoli, *Spazi totalmente coerenti di operatori*, Riv. Mat. Univ. Parma **10** (1984), 269-274.

[2] M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Generalized Functions*, **1**, Academic Press, New York 1964.

[3] M. Poletti, *Topological Singularities of Linear Networks*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL, Mem. Mat. **10** (1986), 103-125.

[4] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris 1966)

Summary

Continuous linear operators in distribution spaces with the properties of causality and translation invariance are characterized as a vector space of convolution type operators. The coherence of this operator space is proved.

* * *