Riv. Mat. Univ. Parma (5) **1** (1992), 57-63

C. Cotti Ferrero e G. Ferrero (*)

Su certe estensioni di quasi-anelli (**)

Introduzione

I quasi-anelli locali sono stati studiati e variamente costruiti da Maxson (cfr. [6], [7], [8], [9]) sfruttando anche risultati di [2]; di qui si possono facilmente costruire esempi di quasi-anelli somma diretta di quasi-anelli locali, e tali somme dirette non sono, naturalmente, quasi-anelli locali. Sotto opportune condizioni sono stati costruiti anche quasi-anelli nilpotenti, come per esempio in [3]. Interessanti risultati e costruzioni generali si trovano in [4], [5].

Chiamiamo qui *NPL* un quasi-anello che sia estensione di un quasi-anello nilpotente mediante una somma diretta di quasi-anelli locali.

Si mostra che un quasi anello N è *NPL* se, e solo se, possiede una catena di ideali $0 = T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_n = N$ tale che, $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, T_{i+1}/T_i sia locale o nilpotente: una tale catena verrà detta *ln-catena.*

I quasi-anelli *NPL* non sono in generale direttamente riducibili in una somma diretta di quasi-anelli locali o nilpotenti, come si vede con un semplice esempio.

Si dimostra che un quasi-anello *NPL* è somma diretta di un numero finito di quasi-anelli locali ed eventualmente di un quasi-anello nilpotente se, e solo se possiede una *ln*-catena i cui ideali propri sono nilpotenti oppure hanno unità e gli elementi nilpotenti quasi-regolari nel senso di [1].

(*) Dip. di Matematica, Univ. Parma, Via D'Azeglio 85, 43100 Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 5.11.1991. Classificazione AMS 16 A 76. Lavoro parzialmente finanziato dal MURST.

$u = \overline{u} + a$, ove $a = -\overline{u} + u$ è l'unità di $A_d(T)$ perché, $\forall n \in N$, risulta $n = t + x$ $(t \in T,\ x \in A_d(T))$. Posto $u = \overline{u} + a$ (con $a \in A_d(N)$) risulta

$$n = nu = (\overline{u} + a)(t + x) = t + ax$$

onde $x = ax$. Il resto è analogo.

Definizione B. Un quasi-anello si dice *NPL* se è estensione (ideale) di un quasi-anello nilpotente effettuata mediante una somma diretta di quasi-anelli locali.

2 - Quasi-anelli *NPL*

Vediamo ora di studiare la struttura dei quasi anelli *NPL* e di un notevole caso particolare.

Teorema 1. *Un quasi-anello N è NPL se, e solo se è nilpotente o possiede una ln-catena con più di due elementi.*

Sia infatti $0 = T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_n = N$ una ln-catena non nilpotente, e lavoriamo per induzione sulla lunghezza n della catena.

Sia i il massimo indice tale che T_i sia nilpotente; allora T_{i+1}/T_i è locale.

In N/T_i possiamo considerare la catena, $0 \subset T_{i+1}/T_i \subset \ldots \subset T_n/T_i = N/T_i$ che è ancora una ln-catena (Oss. 3). Poiché T_{i+1}/T_i è locale allora (Oss. 4) $T_{i+2}/T_i = T_{i+1}/T_i \oplus A_d(T_{i+1}/T_i)$, e possiamo porre $A_d(T_{i+1}/T_i) = Q_{i+1}/T_i$, per un opportuno ideale Q_{i+1} di N.

Ora Q_{i+1}/T_i è locale o nilpotente a seconda che tale sia T_{i+2}/T_{i+1} e pertanto T_{i+2} è *NPL*. Ragionando in modo analogo è facile vedere che se T_{i+k} è *NPL* tale è anche T_{i+k+1}, e questo basta per avere l'asserto.

Se viceversa N è *NPL* non nilpotente possiede un ideale T nilpotente (che ovviamente può essere nullo) tale che $N/T = A_1/T \oplus A_2/T \oplus \ldots \oplus A_k/T$, ove A_i/T sia locale, per $i \in \{1, \ldots, k\}$. La catena

$$0 \subset T \subset A_1 \subset A_1 + A_2 \subset \ldots \subset A_1 + \ldots + A_k = N$$

è una ln-catena non banale.

Vale la pena osservare che un quasi-anello *NPL* non è necessariamente somma diretta di quasi-anelli locali o nilpotenti. Indicato con A il quasi-anello $E8$ di

[10], si nota infatti che $N = A \oplus A$ è NPL, ma non è direttamente riducibile in quasi-anelli locali o nilpotenti.

Si noti tra l'altro che A non è locale e che in esso gli elementi nilpotenti non sono quasi-regolari nel senso di [1] (anche se lo sono nel senso di [10]). Questo suggerisce la

Definizione C. Una catena di ideali $0 \subset T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_n = N$ di un quasi-anello N si dice *sln-catena* se è una *ln*-catena tutti i cui ideali propri non nilpotenti hanno unità ed ogni elemento nilpotente quasi-regolare.

Osservazione 5. Sia $0 = T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_n = N$ una *sln*-catena del quasi-anello non nilpotente N; almeno uno dei T_i della catena deve essere un quasi-anello locale.

Poiché la *sln*-catena $0 = T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_n = N$ non ha tutti gli ideali nilpotenti ha almeno un quoziente locale. Sia i il massimo indice tale che T_i sia nilpotente e T_{i+1}/T_i locale. Sia L^0 l'insieme degli $x \in T_{i+1}$ tali che $x + T_i \in L(T_{i+1}/T_i)$; poiché T_{i+1}/T_i è locale si tratta di un T_{i+1}-sottogruppo di T_{i+1}, e per $x \in L^0$ risulta $xT_{i+1} \neq T_{i+1}$.

Sia $L = \{x \in T_{i+1} \mid xT_{i+1} \neq T_{i+1}\}$; per quanto visto $L^0 \subseteq L$. Consideriamo per assurdo un $x \in L \setminus L^0$. Detta u l'unità di T_{i+1} (esistente per la definizione di *sln*-catena) esiste un $y \in T_{i+1}$ tale che $xy = u - t$, per un opportuno $t \in T_i$ e, per la nilpotenza di T_i, si ha che t è quasi-regolare in T_{i+1}, e dunque esiste uno $z \in T_{i+1}$ tale che $(u - t)z = u$, cioè $xyz = u$, il che è assurdo, perché x è stato preso in L.

In tutto il seguito chiameremo SLN un quasi-anello che sia somma diretta di quasi-anelli locali e di un quasi-anello nilpotente.

Teorema 2. *Un quasi-anello N possiede una sln-catena se, e solo se è SLN.*

Sia $0 = T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_n = N$ una *sln*-catena di N, e dimostriamo per induzione che ognuno dei suoi T_i è SLN, dopo aver osservato che la cosa è ovvia per quanto riguarda T_1.

Per l'ipotesi induttiva possiamo supporre che sia $T_k = A_1 \oplus \ldots \oplus A_t \oplus B$, dove gli A_i siano ideali di N ed anelli locali, e B un ideale nilpotente di N, e poniamo per semplicità $K = A_1 \oplus \ldots \oplus A_t$. Ovviamente K, se non nullo, è un ideale di N dotato di unità.

Sia T_{k+1}/T_k *locale.*

Per la Oss. 4 risulta allora $T_{k+1} = K \oplus Q$, ove Q è l'annullatore destro di K in T_{k+1}, ed è un quasi-anello con unità. Poiché B è contenuto in T_{k+1} ed è nilpotente, risulta quasi-regolare in T_{k+1}, e contenuto in Q (perché annulla K). Dimostriamo che B è quasi-regolare (nel senso di [1]) in Q. Poiché B è quasi-regolare in T_{k+1} risulta che $\forall b \in B$ $\exists y \in T_{k+1}$ tale che $(u - b)y = u$, dove u sia l'unità di T_{k+1}. Ma, poiché $T_{k+1} = K \oplus Q$, possiamo porre $y = k + q$ ($k \in K$, $q \in Q$) e $u = u_1 + u_2$ (u_1 unità di K, u_2 unità di Q). Risulta pertanto $(u_1 + (u_2 - b))(k + q) = u_1 + u_2$, da cui $k + (u_2 - b)q = u_1 + u_2$, ed anche $(-u_1 + k) = u_2 - [(u_2 - b)q]$. Ne segue che $(u_2 - b)q = u_2$, e b è quasi-regolare in Q.

Dimostriamo che Q è locale: infatti T_{k+1}/T_k è isomorfo a $(K \oplus Q)/T_k$, isomorfo a Q/B; dunque Q/B è locale e B, ideale nilpotente di Q, è quasi-regolare in Q; l'asserto segue ora dall'Oss. 5.

Sia invece T_{k+1}/T_k *nilpotente.*

Allora $T_{k+1} = K \oplus Q$, ove Q è nilpotente. Sia *viceversa*

$$N = A_1 \oplus \ldots \oplus A_s \oplus B$$

ove ogni A_i sia locale e B sia nilpotente. Consideriamo la catena

$$0 \subset A_1 \subset A_1 \oplus A_2 \subset \ldots \subset A_1 \oplus \ldots \oplus A_s \subset N$$

ed osserviamo che i suoi quozienti sono locali o nilpotenti.

Ricordando che in un quasi-anello locale i nilpotenti sono contenuti in L e sono quindi quasi-regolari nel senso di [1], possiamo dire che gli ideali propri non nilpotenti della catena hanno unità ed i nilpotenti sono quasi-regolari, il che conclude la dimostrazione.

Bibliografia

[1] J. Beidleman, *Quasi regularity in near-rings*, Math. Z. **89** (1965), 224-229.

[2] J. R. Clay and J. J. Malone, *The near-rings with identity on certain finite groups*, Math. Scand. **19** (1966), 146-150.

[3] G. Ferrero, *Sui quasi-anelli ϕ-ciclici*, Proc. of Conf. on Near-rings and Near-fields, Oberwolfach, submitted.

[4] G. GALLINA, *On the structure of some near-rings*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **121** (1987), 73-90.

[5] G. GALLINA, *Sulle catene para-speciali di quasi-anelli*, Rend. Cir. Mat. Palermo **37** (1987), 138-147.

[6] C. J. MAXSON, *On local near-rings*, Math. Z. **106** (1968), 197-205.

[7] C. J. MAXSON, *Local near-rings of cardinality* p^2, Canad. Math. Bull. **11** (1968), 555-561.

[8] C. J. MAXSON, *On the construction of finite local near-rings (I): On non-cyclic abelian p-groups*, Quart. J. Math. Oxford **21** (1970), 449-457.

[9] C. J. MAXSON, *On the construction of finite local near-rings (II): On non abelian p-groups*, Quart. J. Math. Oxford **22** (1971), 65-72.

[10] G. PILZ, *Near-rings*, North-Holland, Amsterdam 1983.

Summary

Extensions of a nilpotent near-ring by a direct sum of local near-rings are studied in terms of chains of ideals with local or nilpotent quotients.

* * *