Riv. Mat. Univ. Parma (5) **1** (1992), 197-227

RITA CASOLA (*)

Sulla maggiorazione esplicita delle derivate seconde per mezzo dei dati nel problema biarmonico (**)

Introduzione

È ben noto il classico principio di massimo dovuto a Carlo Miranda. Questo principio afferma che, se Ω è un campo limitato del piano xy con frontiera $\Sigma = \partial\Omega$ sufficientemente regolare, detta u una soluzione convenientemente regolare dell'equazione biarmonica

$$\Delta_2 \Delta_2 u = \frac{\partial^4}{\partial x^4} u + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 y^2} u + \frac{\partial^4}{\partial y^4} u = 0 \tag{1}$$

si ha $\quad \max_{\overline{\Omega}} |u| + \max_{\overline{\Omega}} |u_x| + \max_{\overline{\Omega}} |u_y| \leq M(\max_{\partial\Omega} |u| + \max_{\partial\Omega} |\frac{\partial}{\partial n} u|).$

Miranda dimostra che M è una costante dipendente unicamente dalla geometria di Ω.

In [19] non è indicato come si pervenga al calcolo esplicito di M. In questo lavoro io mi occupo di una formula di maggiorazione per le soluzioni dell'equazione (1). In detta formula intervengono norme L^2 anziché C^0 (1). Suppongo che Σ sia

---

(*) Via San Godenzo 52, 00189 Roma, Italia.

(**) Ricevuto il 1.7.1992. Classificazione AMS 35 B 45.

(1) Diversi autori in relazione ai problemi classici della fisica matematica hanno ottenuto formule di maggiorazione di tipo integrale, in particolare con norme L^2, ed alcuni di essi hanno poi da queste dedotto maggiorazioni di tipo *puntuale*; cfr. [27], [29], [5], [17], [6], [18], [25], [26], [23], [24], [28], [22], [14], [15], [1]. Non mi consta che siano state prima considerate formule quali (2), (3) con calcolo esplicito delle costanti di maggiorazione.

una curva regolare semplice chiusa di classe C^{1+h} $(h > \frac{1}{2})$ e considero la seguente maggiorazione

$$(2)\qquad (\int_\Omega (u^2+u_x^2+u_y^2+u_{xx}^2+2u_{xy}^2+u_{yy}^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)^{\frac{1}{2}} \leqslant K(\int_\Sigma (u^2+(\frac{\partial}{\partial s}u_x)^2+(\frac{\partial}{\partial s}u_y)^2)\,\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}.$$

La (2) ha queste peculiarità: (a) vengono maggiorate per mezzo dei dati anche le derivate seconde della u; (b) è esplicitamente calcolata la costante K di maggiorazione.

Con una analisi basata sulla teoria delle equazioni singolari riducibili e sul metodo degli invarianti ortogonali per il calcolo degli autovalori, la (2) viene ottenuta dalla formula di maggiorazione seguente

$$(3)\qquad \int_\Omega (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant H^2 \int_\Sigma (\frac{\partial}{\partial s}u_x)^2 + (\frac{\partial}{\partial s}u_y)^2)\,\mathrm{d}s\,.$$

La dimostrazione della (3) costituisce il punto più delicato della presente ricerca, specie se come io mi propongo, si vuole ottenere il calcolo esplicito di H. Dal calcolo di H è poi facile ottenere quello di K.

È inutile sottolineare l'interesse di una formula quale la (3). In effetti, se Ω è la sezione retta di un cilindro elastico in un problema di deformazioni piane e se si interpreta la u come funzione di Airy relativa a questo problema, la (3) può scriversi al modo seguente

$$(3')\qquad \int_\Omega (\sigma_{11}^2 + 2\sigma_{12}^2 + \sigma_{22}^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant H^2 \int_\Sigma (f_1^2 + f_2^2)\,\mathrm{d}s$$

dove $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ è il tensore degli sforzi ed $f = (f_1, f_2)$ la forza che agisce sul bordo laterale del cilindro. È evidente l'interesse applicativo di una formula quale la (3').

Ho motivo di ritenere che il valore esplicito di H da me ottenuto sia non discosto da quello ottimale. Per esempio nel caso particolare in cui Ω è un campo circolare di raggio unitario ho potuto calcolare la costante ottimale $H = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Il metodo da me impiegato nel caso di un campo di forma circolare mi ha fornito il valore $H = 2$.

1 - Posizione del problema al contorno

Indichiamo con Ω un aperto limitato e semplicemente connesso del piano della variabile complessa $z = x + iy$ e con Σ la sua frontiera. Supponiamo che Σ sia una curva di classe C^{1+h} ossia che il vettore normale interna $n(z)$ verifichi una condizione uniforme di Hölder su Σ con esponente h; supponiamo inoltre che $h > \frac{1}{2}$.

Indichiamo con $C^{m+H}(\Sigma)$ $(C^{m+H}(\overline{\Omega}))$ la classe di tutte le funzioni dotate di derivate fino all'ordine m su $\Sigma(\overline{\Omega})$ e tali che la derivata di ordine m verifichi una condizione di Hölder uniforme su $\Sigma(\overline{\Omega})$ con un certo esponente k $(0 < k \leqslant 1)$.

Indichiamo inoltre con Δ_2 l'operatore di Laplace e consideriamo l'equazione biarmonica (1). Poniamo infine $U(\Omega) = C^{2+H}(\overline{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$. Consideriamo il *problema*: trovare una funzione $u(z)$ tale che

$$(1.1) \qquad \begin{array}{ll} u \in U(\Omega) \quad \Delta_2 \Delta_2 u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g_0 \quad u_x = g_1 \quad u_y = g_2 & \text{su } \Sigma \end{array}$$

essendo $g_0, g_1, g_2 \in C^{1+H}(\Sigma)$ tali che

$$(1.2) \qquad g_0(z) - g_0(z_0) = \int_{z_0}^{z} (g_1(\zeta)\, \mathrm{d}\xi + g_2(\zeta)\, \mathrm{d}\eta) \qquad z \in \Sigma \quad \zeta = \xi + i\eta$$

(dove z_0 è un fissato punto di Σ e l'integrale è esteso ad un arco di Σ descritto nel verso positivo, e avente come punto iniziale z_0 e come punto finale z)

$$(1.3) \qquad \int_{\Sigma} (g_1\, \mathrm{d}x + g_2\, \mathrm{d}y) = 0 .$$

Al numero 2 verrà indicata una rappresentazione della soluzione di (1.1).

Nel numero 3 verranno richiamati alcuni risultati concernenti la teoria degli autovalori.

Al numero 4 verrà dimostrato come, rappresentando la soluzione del problema (1.1) tramite la (2.1) e sfruttando i risultati del numero 3, si possa pervenire alla dimostrazione della (3), fornendo inoltre un metodo di calcolo per la costante H.

Nel numero 5, infine, viene considerato il caso particolare in cui Ω è un dominio circolare. In tal caso si ottengono costanti ottimali nella (2) e nella (3).

2 - Teorema di esistenza e unicità

Indichiamo con $H^2(\Omega)$ il completamento dello spazio $C^2(\overline{\Omega})$ rispetto alla norma $\|u\|_2 = (\sum_{|\alpha| \leqslant 2} \int_{\Omega} |D^\alpha u(z)|^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y)^{\frac{1}{2}}$. $H^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare $(u, v)_{2,2} = \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(z) D^{\alpha} v(z)\, dx\, dy$. Indichiamo con $C_0^{\infty}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni dotate di derivate di ordine comunque elevato in Ω e a supporto compatto contenuto in Ω e con $H_0^2(\Omega)$ il completamento rispetto alla norma $\| \ \|_2$ dello spazio $C_0^{\infty}(\Omega)$.

Teorema 1. *Se è* $u \in H^2(\Omega) \cap C^4(\Omega)$, *e se inolre* $\Delta_2 \Delta_2 u = 0$ *in* Ω, $u = u_x = u_y = 0$, *su* Σ, *allora* $u = 0$ *in* Ω.

Per la dimostrazione di questo teorema di unicità rimandiamo a [**11**].

Teorema 2. *La soluzione del problema* (1.1) *esiste ed è unica. Tale soluzione può rappresentarsi al modo seguente*

$$u(z) = \int_{\Sigma} \left(\varphi_1(\zeta) \frac{\partial}{\partial \xi} S_0(z, \zeta) + \varphi_2(\zeta) \frac{\partial}{\partial \eta} S_0(z, \zeta)\right) ds_{\zeta} + c_0 + c_1 x + c_2 y \tag{2.1}$$

essendo φ_1 *e* φ_2 *funzioni della classe* $C^H(\Sigma)$, c_0, c_1, c_2 *costanti reali e* $S_0(z, \zeta) = |z - \zeta|^2 \log |z - \zeta|$ *la soluzione fondamentale dell'equazione biarmonica.*

L'unicità è conseguenza del teorema precedente. Per quanto riguarda l'esistenza, osserviamo che la funzione a secondo membro della (2.1) è dotata in Ω di derivate di ordine comunque elevato e verifica, in Ω, l'equazione biarmonica; inoltre tale funzione appartiene alla classe $C^{2+H}(\overline{\Omega})$ (cfr. [**9**]). Rimane da verificare che le funzioni φ_1, φ_2 e le costanti c_0, c_1, c_2 possono scegliersi in guisa tale che siano soddisfatte le condizioni al contorno.

Consideriamo il *sistema*

$$\begin{aligned} &\overset{*}{\int_{\Sigma}} \left(\varphi_1(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial x} S_0(z, \zeta) + \varphi_2(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{\partial^2}{\partial \eta\, \partial x} S_0(z, \zeta)\right) ds_{\zeta} = h_1(z) \qquad z \in \Sigma \\ &\overset{*}{\int_{\Sigma}} \left(\varphi_1(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial y} S_0(z, \zeta) + \varphi_2(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{\partial^2}{\partial \eta\, \partial y} S_0(z, \zeta)\right) ds_{\zeta} = h_2(z) \qquad z \in \Sigma. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Osserviamo che gli integrali qui considerati esistono come *integrali singolari* (cfr. [8], [**20**]) e che il sistema (2.2) è *di tipo regolare* (cfr. [**20**], p. 417 e per i calcoli cfr. [9]).

Consideriamo il *sistema omogeneo associato*

$$
(2.3)\qquad
\begin{aligned}
&\mathop{\int^*}_{\Sigma}\left(\varphi_1(\zeta)\frac{\partial}{\partial s_z}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial x}S_0(z,\zeta)+\varphi_2(\zeta)\frac{\partial}{\partial s_z}\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial x}S_0(z,\zeta)\right)ds_\zeta=0 \qquad z\in\Sigma\\
&\mathop{\int^*}_{\Sigma}\left(\varphi_1(\zeta)\frac{\partial}{\partial s_z}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial y}S_0(z,\zeta)+\varphi_2(\zeta)\frac{\partial}{\partial s_z}\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial y}S_0(z,\zeta)\right)ds_\zeta=0 \qquad z\in\Sigma.
\end{aligned}
$$

Diremo che il vettore $\psi(z)=(\psi_1(z),\psi_2(z))$ è una autosoluzione di (2.3) *di prima specie* se ψ_1 e ψ_2 non sono identicamente nulle su Σ e se

$$
\int_{\Sigma}\left(\psi_1(\zeta)\frac{\partial}{\partial\xi}S_0(z,\zeta)+\psi_2(\zeta)\frac{\partial}{\partial\eta}S_0(z,\zeta)\right)ds_\zeta=0 \qquad \forall z\in\boldsymbol{R}^2.
$$

Ogni autosoluzione di (2.3) che non è di prima specie verrà detta *di seconda specie*.

In [9] viene dimostrato che nel caso in esame esiste una sola autosoluzione di prima specie, linearmente indipendente, data dal vettore $\gamma^0=(\dot\xi,\dot\eta)$, essendo $\zeta=\xi(s)+i\eta(s)$ una rappresentazione parametrica mediante l'ascissa curvilinea s della curva Σ. Indicata inoltre con d la *dimensione dello spazio delle autosoluzioni della* (2.3), si ha $3\le d\le 4$ (cfr. [9] p. 71).

Consideriamo ora il *sistema omogeneo trasposto*

$$
(2.4)\qquad
\begin{aligned}
&\mathop{\int^*}_{\Sigma}\left(\varphi_1(\zeta)\frac{\partial}{\partial s_\zeta}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial x}S_0(z,\zeta)+\varphi_2(\zeta)\frac{\partial}{\partial s_\zeta}\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial x}S_0(z,\zeta)\right)ds_\zeta=0 \qquad z\in\Sigma\\
&\mathop{\int^*}_{\Sigma}\left(\varphi_1(\zeta)\frac{\partial}{\partial s_\zeta}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial y}S_0(z,\zeta)+\varphi_2(\zeta)\frac{\partial}{\partial s_\zeta}\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial y}S_0(z,\zeta)\right)ds_\zeta=0 \qquad z\in\Sigma.
\end{aligned}
$$

Diremo che $\psi(z)=(\psi_1(z),\psi_2(z))$ è un'autosoluzione *di prima specie* per il sistema (2.4) se

$$
(2.5)\qquad \int_{\Sigma}\left(\psi_1(\zeta)\frac{\partial}{\partial s_\zeta}\frac{\partial}{\partial\xi}S_0(z,\zeta)+\psi_2(\zeta)\frac{\partial}{\partial s_\zeta}\frac{\partial}{\partial\eta}S_0(z,\zeta)\right)ds_\zeta=0 \qquad \forall z\in\boldsymbol{R}^2.
$$

Ogni autosoluzione di (2.4) che non è di prima specie verrà detta *di seconda specie*.

Si verifica, mediante integrazione per parti, che le coppie $(1,0)$, $(0,1)$, (x,y) sono autosoluzioni di prima specie del sistema (2.4) *linearmente indipendenti*. Proviamo che ogni altra autosoluzione di prima specie è loro combinazione lineare.

Sia u una funzione della classe $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)$; risulta

$$u(z) = \frac{1}{8\pi} \int_{R^2} \Delta_2 \Delta_2 u S_0(z, \zeta)\, d\xi\, d\eta\,. \tag{2.6}$$

Dalla (2.5) si deduce

$$\int_\Sigma (\psi_1(z) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} u(z) + \psi_2(z) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} u(z))\, ds = 0 \qquad \forall u \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)\,. \tag{2.7}$$

e ciò implica (cfr. [2])

$$\psi_1(z) = a + bx \qquad \psi_2(z) = c + by \qquad (a, b, c) \in \boldsymbol{R}^3\,.$$

Vogliamo ora dimostrare che il sistema (2.4) non ammette autosoluzioni di seconda specie. Supponiamo infatti che $\varphi(z)$ sia una autosoluzione di seconda specie. Consideriamo la funzione

$$v(z) = \int_\Sigma (\varphi_1(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \frac{\partial}{\partial \xi} S_0(z, \zeta) + \varphi_2(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \frac{\partial}{\partial \eta} S_0(z, \zeta))\, ds_\zeta\,.$$

Osserviamo che, poiché Σ è una curva di classe C^{1+h}, le funzioni φ_1, φ_2 appartengono allo spazio $C^{h'}(\Sigma)$ con $h' > \frac{1}{2}$ (cfr. [20]). Ciò implica che la funzione $v(z)$ appartiene allo spazio $H^2(\Omega)$ (per la dimostrazione cfr. [4]). Tale funzione è soluzione del problema

$$v \in H^2(\Omega) \qquad \Delta_2 \Delta_2 v = 0 \qquad z \in \Omega, \qquad \frac{\partial}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial y} v = 0 \quad z \in \Sigma$$

e quindi si ha $v(z) = c$, $z \in \overline{\Omega}$. Posto $u(z) = v(z) - c$ risulta $u(z) = 0$ per ogni $z \in \overline{\Omega}$.

Sia D_R un disco di raggio R contenente Ω. Si ha $u \in H^2(D_R - \Omega)$, $D^\alpha u(z) = 0$ $z \in \Sigma$, $|\alpha| \leq 1$. Si può allora costruire una successione $\{u_n\}$ di funzioni tale che: $u_n \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2 - \Omega)$, $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{H^2(D_R - \Omega)} = 0$.

Ciò implica $\lim_{n\to\infty} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u\|_{L^2(\partial D_R)} = 0$, $|\alpha| \leq 1$. Si ha quindi

$$\int_{D_R - \Omega} (\Delta_2 u)^2\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \int_{D_R - \Omega} \Delta_2 u\, \Delta_2 u_n\, dx\, dy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\partial D_R} (u_n \frac{\partial}{\partial n} \Delta_2 u - \Delta_2 u \frac{\partial}{\partial n} u_n)\, ds = \int_{\partial D_R} (u \frac{\partial}{\partial n} \Delta_2 u - \Delta_2 u \frac{\partial}{\partial n} u)\, ds\,.$$

Facendo tendere R all'infinito e osservando che si ha

$$u(z) = O(\log|z|), \qquad D^\alpha u(z) = O(|z|^{-\alpha}) \quad |\alpha| \geqslant 1 \quad |z| \to \infty$$

si ottiene $\int_{R^2 - \Omega} (\Delta_2 u)^2 \, dx\, dy = 0$ cioè $\Delta_2 u = 0$, in $\boldsymbol{R}^2 \setminus \Omega$. D'altra parte, considerando una funzione $f(z) \in C_0^\infty(D_R)$, si ha

$$\int_{D_R} u \Delta_2 f \, dx\, dy = \int_{D_R - \overline{\Omega}} u \Delta_2 f \, dx\, dy$$

$$= \int_{\partial D_R} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \Delta_2 f - \Delta_2 f \frac{\partial}{\partial n} u\right) ds - \int_{\Sigma} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \Delta_2 f - \Delta_2 f \frac{\partial}{\partial n} u\right) ds + \int_{D_R - \overline{\Omega}} \Delta_2 u f \, dx\, dy$$

cioè
$$\int_{D_R} u \Delta_2 f \, dx\, dy = 0 \qquad \forall f \in C_0^\infty(D_R).$$

Dal lemma di Caccioppoli-Weyl (cfr. **[16]** p. 146) si deduce $\Delta_2 u = 0$, $z \in D_R$. Possiamo quindi concludere che essendo $u(z)$ una funzione armonica, e quindi analitica, in tutto il piano e nulla in $\overline{\Omega}$ essa è nulla in tutto $\boldsymbol{R}^2$. Si ha quindi $v(z) = c$ $\forall z \in \boldsymbol{R}^2$. Possiamo dunque affermare che

$$\frac{\partial}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial y} v = 0 \qquad \forall z \in \boldsymbol{R}^2. \tag{2.8}$$

Rappresentando una funzione della classe $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ tramite la (2.7), dalle (2.8) si deduce

$$\begin{aligned} &\int_\Sigma \left(\varphi_1(\zeta) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\zeta) + \varphi_2(\zeta) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} u(\zeta)\right) ds = 0 \\ &\int_\Sigma \left(\varphi_1(\zeta) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} u(\zeta) + \varphi_2(\zeta) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\zeta)\right) ds = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

per ogni $u \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)$.

Ponendo $f(\zeta) = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}$ dalla prima delle (2.9) si deduce la (2.7); ciò implica che (φ_1, φ_2) è una autosoluzione di prima specie e ciò è assurdo. Il sistema (2.2) ha quindi soluzione per ogni coppia di termini noti ortogonali alle coppie (1, 0), (0, 1), (x, y). Esiste, quindi, una soluzione $(\varphi_1, \varphi_2) \in C^H(\Sigma) \times C^H(\Sigma)$ del sistema (2.2) quando si ponga $h_1 = \dfrac{\partial g_1}{\partial s}$, $h_2 = \dfrac{\partial g_2}{\partial s}$, essendo le predette condizioni di ortogonalità certamente soddisfatte (cfr. (1.3)). Posto

$$u_0(z) = \int_\Sigma (\varphi_1(\zeta) \frac{\partial}{\partial \xi} S_0(z, \zeta) + \varphi_2(\zeta) \frac{\partial}{\partial \eta} S_0(z, \zeta))\, ds_\zeta ,$$

dove (φ_1, φ_2) sono le funzioni così ottenute, consideriamo il seguente sistema algebrico

$$u_0(z_0) + ax_0 + by_0 + c = g_0(z_0)$$

$$\frac{\partial u_0(z_0)}{\partial x} + a = g_1(z_0) \qquad \frac{\partial u_0(z_0)}{\partial y} + b = g_2(z_0) .$$

Poiché $\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial s}$, $\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial s}$, si ha $\frac{\partial u_0}{\partial x} + a = g_1(z)$, $\frac{\partial u_0}{\partial y} + b = g_2(z)$, $\forall z \in \Sigma$. Quindi, tenendo conto delle (1.2), si ha

$$u_0(z) + ax + by + c = g_0(z_0) + \int_{z_0}^{z} (g_1\, dx + g_2\, dy) = g_0(z) \qquad \forall z \in \Sigma .$$

Il teorema è così completamente dimostrato.

Indicato con χ l'indice del sistema (2.3) si ha $\chi = 0$ (cfr. [9] p. 60); ciò implica che gli autoinsiemi dei sistemi (2.3), (2.4) hanno la stessa dimensione; deve quindi essere $d = 3$. Da ciò segue che il sistema (2.3) ammette due autosoluzioni di seconda specie.

Osserviamo che, dette $\gamma^{(1)} = (\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)})$, $\gamma^{(2)} = (\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)})$ le autosoluzioni di seconda specie di (2.3), si ha

$$\int_\Sigma (\gamma_1^{(k)}(\zeta) \frac{\partial}{\partial \xi} S_0(z, \zeta) + \gamma_2^{(k)}(\zeta) \frac{\partial}{\partial \eta} S_0(z, \zeta))\, ds_\zeta = c_0^{(k)} + c_1^{(k)} x + c_2^{(k)} y$$

$z \in \Omega$, $k = 1, 2$, $(c_0^{(k)}, c_1^{(k)}, c_2^{(k)}) \in \boldsymbol{R}^3$.

3 - Richiami ed osservazioni sulla teoria degli autovalori

Sia T un *operatore compatto, positivo* (un operatore T è *positivo* se $(Tx, x) \geqslant 0$ per ogni $x \neq 0$) ed *autoaggiunto* (PCO) di uno spazio di Hilbert S in sé. Siano $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_k \geqslant \ldots$ i suoi autovalori. Vogliamo costruire due successioni $\{\lambda_k^{(\nu)}\}$ e $\{\sigma_k^{(\nu)}\}$ che approssimino per difetto e per eccesso l'autovalore μ_k.

Risolviamo dapprima il problema dell'*approssimazione per difetto* di μ_k mediante il *metodo di Rayleigh-Ritz*.

Consideriamo un sistema completo di vettori $\{w_k\}$ nello spazio S; denotiamo con W_ν il sottospazio di S generato dai primi ν vettori e con P_ν la proiezione di S su W_ν. Si ha

Teorema 3. *Gli autovalori dell'operatore $P_\nu T P_\nu$ sono le radici dell'equazione*

$$\det((Tw_i, w_j) - \lambda(w_i, w_j)) = 0 \qquad i, j = 1, \ldots, \nu \tag{3.1}$$

più l'autovalore $\lambda = 0$. Indicate con $\lambda_1^{(\nu)} \geq \lambda_2^{(\nu)} \geq \ldots \geq \lambda_\nu^{(\nu)}$ tali radici, per ogni fissato k e per ogni $\nu \geq k$ si ha

$$\lambda_k^{(\nu)} \leq \lambda_k^{(\nu+1)} \leq \mu_k \qquad \lim_{\nu\to\infty} \lambda_k^{(\nu)} = \mu_k . \tag{3.2}$$

(Per la dimostrazione di questo teorema e dei teoremi 4 e 5 cfr. [10], [13]).

Per quanto riguarda invece l'*approssimazione per eccesso* di μ_k utilizziamo la *teoria degli invarianti ortogonali.* Indichiamo con S ed S' due spazi di Hilbert e con U una congruenza di S e S' cioè un operatore unitario. Sia f una funzione definita su ogni PCO di un qualunque spazio di Hilbert. Diremo che f è un *invariante ortogonale* se $f(T) = f(U^{-1}TU)$ $\forall U$ operatore unitario. Si dimostra che *condizione necessaria e sufficiente affinché $f(T)$ sia un invariante ortogonale è che esso dipenda unicamente dagli autovalori di T.*

Diremo che il PCO T *appartiene alla classe* $\mathscr{C}^n$ se $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^n < +\infty$; poniamo in tal caso $\mathscr{T}^n(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^n$. $\mathscr{T}^n(T)$ è un invariante ortogonale di T ed è una funzione continua di T rispetto alla convergenza uniforme.

Sia $\{w_k\}$ un sistema di vettori ortonormale oltre che completo; sussiste il seguente teorema che risolve il problema da noi considerato:

Teorema 4. *Supponiamo $T \in \mathscr{C}^n$. Se $\lambda_1^{(\nu)} \geq \lambda_2^{(\nu)} \geq \ldots \geq \lambda_\nu^{(\nu)}$ sono le radici della* (3.1),

posto $$\sigma_k^{(\nu)} = (\mathscr{T}^n(T) - \mathscr{T}^n(P_\nu T P_\nu) + (\lambda_k^{(\nu)})^n)^{\frac{1}{n}}$$ *si ha*

$$\sigma_k^{(\nu)} \geq \sigma_k^{(\nu+1)} \geq \mu_k \qquad \lim_{\nu\to\infty} \sigma_k^{(\nu)} = \mu_k . \tag{3.3}$$

Supponiamo ora che $S = L^2(A, \mu)$ cioè S sia lo spazio di Hilbert (reale) costituito dalle funzioni che in A hanno modulo di quadrato sommabile rispetto alla misura positiva μ. Ciò non è restrittivo poiché ogni spazio di Hilbert separabile è congruente ad uno spazio $L^2(A, \mu)$. Sussiste il seguente teorema che caratterizza i PCO della classe $\mathscr{C}^n$.

Teorema 5. *Un operatore T nello spazio $L^2(A, \mu)$ appartiene alla classe $\mathcal{C}^n$ se e solo se ammette la rappresentazione integrale*

$$T^n u = \int_A K(x, y)\, u(y)\, \mathrm{d}\mu_y$$

essendo
$$K(x, y) = \int_A H(x, t)\, H(t, y)\, \mathrm{d}\mu_t$$

ed $H(x, y)$ un nucleo simmetrico appartenente allo spazio $L^2(A \times A, \mu \times \mu)$.

Possiamo a questo punto dare all'invariante $\mathcal{S}^n$ una *espressione integrale*

$$\mathcal{S}^n(T) = \int_A K(x, x)\, \mathrm{d}\mu_x = \int_A \int_A |H(x, y)|^2\, \mathrm{d}\mu_x\, \mathrm{d}\mu_y\,. \tag{3.4}$$

Sia ora T un operatore compatto ed autoaggiunto di S in sé (non necessariamente positivo) e tale che il PCO T^2 appartenga alla classe $\mathcal{C}^n$. Supponiamo di dover determinare

$$\Lambda = \sup_{x \in S - \{(0)\}} \frac{(Tx, x)}{\|x\|^2}\,.$$

Si considera la soluzione $\lambda_1^{(\nu)}$ di (3.1) e si pone (cfr. [3])

$$\sigma^{(\nu)} = (\mathcal{S}^n(T^2) - \mathcal{S}^n((P_\nu T P_\nu)^2) + (\lambda_1^{(\nu)})^{2n})^{\frac{1}{n}} \qquad \gamma_\nu = \sqrt{\sigma^{(\nu)}}.$$

Risulta
$$\lambda_1^{(\nu)} \leqslant \lambda_1^{(\nu+1)} \qquad \gamma_\nu \geqslant \gamma_{\nu+1} \qquad \lim_{\nu \to \infty} \lambda_1^{(\nu)} = \lim_{\nu \to \infty} \gamma_\nu = \Lambda\,.$$

Supponiamo sempre che T sia un operatore compatto ed autoaggiunto. Se T ha almeno k autovalori negativi (contati con la loro molteplicità) poniamo μ_k uguale al k-esimo autovalore negativo, altrimenti poniamo $\mu_k = 0$. Vogliamo costruire due successioni approssimanti μ_k per eccesso e per difetto.

Fissati $t_1, \ldots, t_{k-1} \in S$, poniamo

$$U = \{u \in S - \{0\} \,|\, (u, t_i) = 0, \;\; i = 1, \ldots, k-1\}.$$

Teorema 6. *Si ha*

$$\mu_k = \max_{t_1, \ldots, t_{k-1} \in S} \alpha(t_1, \ldots, t_{k-1})$$

essendo $\alpha(t_1, \ldots, t_{k-1}) = \inf\limits_{u \in U} \dfrac{(Tu, u)}{\|u\|^2}$.

Se μ_k è autovalore si ha $Tu = \sum_{h=1}^{k} \mu_k(u, u_h)u_h + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(u, v_i)v_i$ dove $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_k$ e $\lambda_i \geqslant \mu_k$ $\forall i$; in questo caso si ha: $\alpha(u_1, \ldots, u_{k-1}) = \mu_k$.

Se μ_k non è autovalore si possono presentare due alternative: $Tu = \sum_{h=1}^{p} \mu_h(u, u_h)u_h + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(u, v_i)v_i$ $\mu_h < 0$, $\lambda_i \geqslant 0$, $1 \leqslant p < k$ oppure $Tu = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(u, u_i)u_i$, $\lambda_i \geqslant 0$. Nel primo caso si ha $\alpha(u_1, \ldots, u_p, \ldots, u_p) = 0$ e nel secondo caso si ha $(\alpha(0, \ldots, 0) = 0$. In tutti i casi, quindi, esiste $(t_1, \ldots, t_{k-1})$ tale che $\alpha(t_1, \ldots, t_{k-1}) = \mu_k$. Mostriamo ora che $\forall (t_1, \ldots, t_{k-1})$, si ha $\alpha(t_1, \ldots, t_{k-1}) \leqslant \mu_k$. Se μ_k è autovalore si possono scegliere i coefficienti c_j in modo tale che $\sum_{j=1}^{k} c_j(u_j, t_i) = 0$ $i = 1, \ldots, k-1$ $\sum_{j=1}^{k} |c_j|^2 = 1$; posto allora $u = \sum_{j=1}^{k} c_j u_j$, si ha $(Tu, u) = \sum_{j=1}^{k} c_j^2 \mu_j \leqslant \mu_k$ cioè $\alpha(t_1, \ldots, t_{k-1}) \leqslant \mu_k$. Se μ_k non è autovalore si possono scegliere i coefficienti c_j analogamente a prima e in modo tale che, posto $u = \sum_{j=k}^{2k-1} c_j v_j$, si ha: $(Tu, u) = \sum_{j=k}^{2k-1} c_j^2 \lambda_j \leqslant \lambda_k$ (abbiamo ordinato la successione $\{\lambda_j\}$ in modo tale che risulti non crescente). Poichè $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, si ha $\alpha(t_1, \ldots, t_{k-1}) \leqslant 0$.

Teorema 7. *Sia T un operatore compatto ed autoaggiunto. Indicate con $\mu_1^{(\nu)} \leqslant \mu_2^{(\nu)} \leqslant \ldots \leqslant \mu_\nu^{(\nu)}$ le radici di (3.1) si ha*

$$\mu_k^{(\nu)} = \max_{t_1, \ldots, t_{k-1} \in S} \alpha_\nu(t_1, \ldots, t_{k-1}) \tag{3.5}$$

essendo $\alpha_\nu(t_1, \ldots, t_{k-1}) = \min_{W_\nu \cap U} \dfrac{(Tu, u)}{\|u\|^2}$. *Inoltre* $\lim_{\nu\to\infty} \mu_k^{(\nu)} = \mu_k$.

La (3.5) si dimostra usando tecniche ormai classiche (cfr. [7] p. 239). Verificheremo che $\lim_{\nu\to\infty} \mu_k^{(\nu)} = \mu_k$. Poniamo

$$V = \{u \in S - \{0\} \,|\, (u, P_\nu t_i) = 0, \ \ i = 1, \ldots, k-1\}.$$

Si ha
$$\mu_k \geqslant \inf_{u\in V} \frac{(Tu, u)}{\|u\|^2} = \inf_{u\in V}\left[\frac{((T - P_\nu T P_\nu)u, u)}{\|u\|^2} + \frac{(P_\nu T P_\nu u, u)}{\|u\|^2}\right]$$
$$\geqslant -\|T - P_\nu T P_\nu\| + \inf_{u\in V} \frac{(P_\nu T P_\nu u, u)}{\|u\|^2}.$$

D'altra parte
$$\inf_{u\in V} \frac{(P_\nu T P_\nu u, u)}{\|u\|^2} = \inf_{u\in V,\, P_\nu u \neq 0} \frac{(P_\nu T P_\nu u, u)}{\|P_\nu u\|^2}.$$

Infatti se $\forall u \in V$ risulta $(P_\nu TP_\nu u, u) \geqslant 0$ allora i due estremi inferiori sono nulli. Altrimenti $\forall u \in V$ tale che $(P_\nu TP_\nu u, u) < 0$ si ha $\dfrac{(P_\nu TP_\nu u, u)}{\|u\|^2} \geqslant \dfrac{(P_\nu TP_\nu u, u)}{\|P_\nu u\|^2}$ ed anche

$$\inf_{u \in V,\, P_\nu u \neq 0} \frac{(P_\nu TP_\nu u, u)}{\|P_\nu u\|^2} = \inf_{u \in V \cap W_\nu} \frac{(P_\nu TP_\nu u, u)}{\|u\|^2} \geqslant \inf_{u \in V} \frac{(P_\nu TP_\nu u, u)}{\|u\|^2}.$$

Si ha inoltre

$$\alpha_\nu(t_1, \ldots, t_{k-1}) = \min_{u \in W_\nu \cap U} \frac{(Tu, u)}{\|u\|^2} = \min_{P_\nu u \in U} \frac{(P_\nu TP_\nu u, u)}{\|P_\nu u\|^2} = \inf_{u \in V} \frac{(P_\nu TP_\nu u, u)}{\|u\|^2}.$$

In definitiva si ottiene $\quad \mu_k \geqslant -\|T - P_\nu TP_\nu\| + \mu_k^{(\nu)}$.

D'altra parte è evidente che $\alpha_\nu(t_1, \ldots, t_{k-1}) \geqslant \alpha(t_1, \ldots, t_{k-1})$ e quindi che $\mu_k^{(\nu)} \geqslant \mu_k$. Allora $0 \leqslant \mu_k^{(\nu)} - \mu_k \leqslant \|T - P_\nu TP_\nu\|$. Poichè $P_\nu TP_\nu$ converge in norma a T si ha la tesi.

Vogliamo ora costruire una successione approssimante μ_k per difetto.

Teorema 8. *Supponiamo $T^2 \in \mathscr{C}^n$. Poniamo*

$$\sigma_k^{(\nu)} = (\mathscr{S}^n(T^2) - \mathscr{S}^n((P_\nu TP_\nu)^2) + (\mu_k^{(\nu)})^{2n})^{\frac{1}{2n}}.$$

Si ha $\sigma_k^{(\nu)} \geqslant \sigma_k^{(\nu+1)}$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} (-\sigma_k^{(\nu)}) = \mu_k$.

Dal Teorema 7 e dal fatto che $P_\nu TP_\nu$ converge in norma a T si deduce $\lim\limits_{\nu \to \infty} -\sigma_k^{(\nu)} = \mu_k$. Dobbiamo verificare la monotonia di $\sigma_k^{(\nu)}$ e cioè che per $\nu \geqslant k$ si ha

$$\sum_{h=1,\, h \neq k}^{\nu} (\mu_h^{(\nu)})^{2n} \leqslant \sum_{h=1,\, h \neq k}^{\nu+1} (\mu_h^{(\nu+1)})^{2n}.$$

Supponiamo che esista un intero p tale che

(3.6) $\qquad 1 \leqslant p \leqslant \nu - 1 \quad \mu_1^{(\nu)} \leqslant \ldots \leqslant \mu_p^{(\nu)} < 0 \leqslant \mu_{p+1}^{(\nu)} \leqslant \ldots \leqslant \mu_\nu^{(\nu)}$.

Si ha $\quad \mu_1^{(\nu+1)} \leqslant \mu_1^{(\nu)}, \ldots, \mu_p^{(\nu+1)} \leqslant \mu_p^{(\nu)} \quad \mu_{p+1}^{(\nu)} \leqslant \mu_{p+2}^{(\nu+1)}, \ldots, \mu_\nu^{(\nu)} \leqslant \mu_{\nu+1}^{(\nu+1)}$.

Se $1 \leqslant k \leqslant p + 1$ si ha

$$\sum_{h=1,\, h \neq k}^{\nu} (\mu_h^{(\nu)})^{2n} \leqslant \sum_{h=1,\, h \neq k}^{p} (\mu_h^{(\nu+1)})^{2n} + \sum_{h=p+2}^{\nu+1} (\mu_h^{(\nu+1)})^{2n}.$$

Se $k \geq p+2$ di ha $\mu_h^{(\nu+1)} \geq 0$ e quindi $(\mu_k^{(\nu+1)})^{2n} \leq (\mu_{k+1}^{(\nu+1)})^{2n}$. Si ottiene allora

$$\sum_{h=1, h\neq k}^{\nu} (\mu_h^{(\nu)})^{2n} \leq \sum_{h=1}^{p} (\mu_h^{(\nu+1)})^{2n} + \sum_{h=p+2}^{k} (\mu_h^{(\nu+1)})^{2n} + \sum_{h=k+2}^{\nu+1} (\mu_h^{(\nu+1)})^{2n} \leq \sum_{h=1, h\neq k}^{\nu+1} (\mu_h^{(\nu+1)})^{2n}.$$

In modo analogo si dimostra il caso in cui non sussiste la (3.6), ossia i $\mu_k^{(\nu)}$ sono tutti negativi o tutti non negativi.

4 - Dimostrazione delle formule di maggiorazione (2) e (3) e calcolo delle relative costanti

Ci proponiamo ora di dimostrare la (2) assumendo che u sia una funzione biarmonica di $U(\Omega)$. Inizialmente verrà dimostrato che per determinare una costante K per la quale sussiste la (2) è sufficiente determinare una costante H che verifichi la disuguaglianza (3).

Teorema 9. *Indichiamo con R il raggio di un disco chiuso contenente $\bar{\Omega}$ al suo interno e con C_1^2 l'inverso del più piccolo autovalore del problema $\Delta_2 v - \lambda v = 0 \quad z \in \Omega \quad \frac{\partial}{\partial n} v = 0 \quad z \in \Sigma$. Posto $H_1 = 2(2R^2+1)\, C_1^2$, $H_2 = R + 4(2R^2+1)|\Sigma|\,|\Omega|^{-1}$ si ha $K = \max[H(H_1+1), H_2]$.*

Osserviamo che per il calcolo della costante C_1^2 si può applicare al problema $\Delta_2 v - \lambda v = 0 \ z \in \Omega \ \frac{\partial}{\partial n} v = 0 \ z \in \Sigma$ il metodo degli invarianti ortogonali (cfr. [12]) esposto nel paragrafo precedente. È quindi noto un metodo di calcolo per C_1.

Si ha

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|\operatorname{grad} f\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall f \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ tale che } \int_\Omega f(z)\, dx\, dy = 0. \tag{4.1}$$

Dalla (4.1) segue la disuguaglianza

$$\|\operatorname{grad} w\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \Big(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha w\|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{4.2}$$

$\forall w \in C^2(\bar{\Omega})$ e verificante le seguenti condizioni

$$\int_\Omega w_x(z)\, dx\, dy = \int_\Omega w_y(z)\, dx\, dy = 0. \tag{4.3}$$

Sia $u(z)$ una funzione di $C^2(\bar{\Omega})$. Si può porre $w(z) = u(z) - ax - by$ essendo

$$a = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_x(z)\, dx\, dy \qquad b = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_y(z)\, dx\, dy .$$

La funzione $w(z)$ verifica le (4.3). Si ha quindi:

$$\|\operatorname{grad} u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 2C_1^2 \big(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \big) + 4|\Sigma|\, |\Omega|^{-1} \|u\|^2_{L^2(\Sigma)} . \tag{4.4}$$

Sia $\bar{D}_R$ un disco chiuso di raggio R (si può porre R = diametro di Ω) contenente $\bar{\Omega}$. Dalla formula di Green

$$\int_\Sigma w \frac{\partial v}{\partial n}\, ds = \int_\Omega w \Delta_2 v\, dx\, dy + \int_\Omega \operatorname{grad} w \operatorname{grad} v\, dx\, dy$$

ponendo $w = u^2$, $v = \frac{1}{4}|z|^2$, si ottiene

$$\int_\Omega u^2\, dx\, dy \leqslant \frac{R}{2} \int_\Sigma u^2\, ds + R\big(\int_\Omega u^2\, dx\, dy\big)^{\frac{1}{2}} \big(\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2\, dx\, dy\big)^{\frac{1}{2}} . \tag{4.5}$$

Poniamo

$$a = \big(\int_\Omega u^2\, dx\, dy\big)^{\frac{1}{2}} \qquad b = \sqrt{\frac{R}{2}} \big(\int_\Sigma u^2\, ds\big)^{\frac{1}{2}} \qquad c = R\big(\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2\, dx\, dy\big)^{\frac{1}{2}} .$$

Dalla (4.5) si deduce $a^2 \leqslant b^2 + ac$ il che implica $a \leqslant b + c$.

La funzione u verifica quindi la seguente disuguaglianza (cfr. **[16]** cap. 4)

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \sqrt{\frac{R}{2}} \|u\|_{L^2(\Sigma)} + R\|\operatorname{grad} u\|_{L^2(\Omega)} . \tag{4.6}$$

Dalle (4.4), (4.6) si ottiene

$$\int_\Omega (u^2 + u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy \leqslant H_1 \int_\Omega (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\, dx\, dy + H_2 \int_\Sigma u^2\, ds$$

avendo posto $H_1 = (2R^2 + 1) 2C_1^2 \qquad H_2 = R + 4(2R^2 + 1)|\Sigma|\, |\Omega|^{-1}$.

Ponendo allora $K = \max[H(H_1 + 1), H_2]$, dalla (3) si deduce la (2).

Introduciamo lo spazio $S = L^2(\Sigma) \times L^2(\Sigma)$; gli elementi di S saranno indicati con $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ essendo $\varphi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$ funzioni di $L^2(\Sigma)$. Possiamo definire in S un prodotto scalare, che indicheremo con $[\,,]$, al modo seguente $[\varphi, \psi] = (\varphi_1, \psi_1) + (\varphi_2, \psi_2)$, dove $(\,,)$ denota il prodotto scalare in $L^2(\Sigma)$. La norma introdotta dal prodotto scalare $[\,,]$ verrà indicata con $|||\ |||$, mentre $\|\ \|$ indica la norma dello spazio $L^2(\Sigma)$. S risulta essere uno spazio di Hilbert.

Teorema 10. *Rappresentando la soluzione del problema* (1.1) *mediante la* (2.1) *si ottiene*

$$\tag{4.7} \begin{gathered} \int_\Omega (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\, dx\, dy = [T\varphi, \varphi] \\ \int_\Sigma ((\frac{\partial}{\partial s} u_x)^2 + (\frac{\partial}{\partial s} u_y)^2)\, ds = [L\varphi, \varphi] + 4\pi^2 |||\varphi|||^2 \end{gathered}$$

essendo T *ed* L *operatori compatti ed autoaggiunti dello spazio* S *in sè.*

Rappresentiamo la soluzione del problema (1.1) tramite la (2.1); si ottiene

$$\tag{4.8} \int_\Omega (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\, dx\, dy = (\varphi_1, J_{11}\varphi_1) + 2(\varphi_1, J_{12}\varphi_2) + (\varphi_2, J_{22}\varphi_2), \quad \text{dove}$$

$$\tag{4.9} J_{ij}\varphi = \int_\Sigma \varphi(\zeta) K_{ij}(z, \zeta)\, ds_\zeta$$

e le K_{ij} sono date da

$$\tag{4.10} \begin{aligned} K_{11}(w, \zeta) &= \int_\Omega (\frac{\partial^3}{\partial x^3} S_0(z, w) \frac{\partial^3}{\partial x^3} S_0(z, \zeta) + \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2} S_0(z, w) \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2} S_0(z, \zeta) \\ &\quad + 2 \frac{\partial^3}{\partial x^2\, \partial y} S_0(z, w) \frac{\partial^3}{\partial x^2\, \partial y} S_0(z, \zeta))\, dx\, dy \\ K_{12}(w, \zeta) &= \int_\Omega (\frac{\partial^3}{\partial x^3} S_0(z, w) \frac{\partial^3}{\partial x^2\, \partial y} S_0(z, \zeta) + \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2} S_0(z, w) \frac{\partial^3}{\partial y^3} S_0(z, \zeta) \\ &\quad + 2 \frac{\partial^3}{\partial x^2\, \partial y} S_0(z, w) \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2} S_0(z, \zeta))\, dx\, dy \\ K_{22}(w, \zeta) &= \int_\Omega (\frac{\partial^3}{\partial y^3} S_0(z, w) \frac{\partial^3}{\partial y^3} S_0(z, \zeta) + \frac{\partial^3}{\partial x^2\, \partial y} S_0(z, w) \frac{\partial^3}{\partial x^2\, \partial y} S_0(z, \zeta) \\ &\quad + 2 \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2} S_0(z, w) \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2} S_0(z, \zeta))\, dx\, dy. \end{aligned}$$

I nuclei K_{11}, K_{12}, K_{22} sono funzioni continue per $z \neq \zeta$, $(z, \zeta) \in \Sigma \times \Sigma$ e hanno per $z = \zeta$ una singolarità logaritmica. Gli operatori J_{11}, J_{12}, J_{22} sono quindi operatori compatti di $L^2(\Sigma)$ in sè. Essendo inoltre K_{11}, K_{22} funzioni simmetriche, gli operatori J_{11}, J_{22} risultano essere autoaggiunti.

Dal momento che le funzioni $\frac{\partial}{\partial s} u_x$ e $\frac{\partial}{\partial s} u_y$ si rappresentano tramite integrali singolari, si ottiene (cfr. [8]), per il secondo membro della (3)

$$\int_\Sigma \left(\left(\frac{\partial}{\partial s} u_x\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial s} u_y\right)^2\right) \mathrm{d}s$$

$$= (\varphi_1, R_{11}\varphi_1) + 2(\varphi_1, R_{12}\varphi_2) + (\varphi_2, R_{22}\varphi_2) + 4\pi^2(\|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2) \tag{4.11}$$

dove

$$R_{ij}\varphi = \int_\Sigma \varphi(\zeta)\, H_{ij}(w, \zeta)\, \mathrm{d}s_\zeta \tag{4.12}$$

e le H_{ij} sono date da

$$\begin{aligned}
H_{11}(\zeta, w) = {} & 4\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(x-\xi)^2}{|z-\zeta|^2} \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(x-\alpha)^2}{|z-w|^2} \mathrm{d}s_z \\
& + 4\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{|z-\zeta|^2} \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(x-\alpha)(y-\beta)}{|z-w|^2} \mathrm{d}s_z \\
& + 4\int_\Sigma^* \frac{\partial}{\partial s_z} \log|z-\zeta| \frac{\partial}{\partial s_z} \log|z-w|\, \mathrm{d}s_z \\
& + 4\int_\Sigma^* \left(\frac{\partial}{\partial s_z} \log|z-\zeta| \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(x-\alpha)^2}{|z-w|^2} + \frac{\partial}{\partial s_z} \log|z-w| \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(x-\xi)^2}{|z-\zeta|^2}\right) \mathrm{d}s_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{12}(\zeta, w) = {} & 4\int_\Sigma \left(\frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(x-\xi)^2}{|z-\zeta|^2} \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(x-\alpha)(y-\beta)}{|z-w|^2}\right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(y-\beta)^2}{|z-w|^2} \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{|z-\zeta|^2}\right) \mathrm{d}s_z \\
& + 4\int_\Sigma^* \left(\frac{\partial}{\partial s_z} \log|z-\zeta| \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(x-\alpha)(y-\beta)}{|z-w|^2} + \frac{\partial}{\partial s_z} \log|z-w| \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{|z-\zeta|^2}\right) \mathrm{d}s_z,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
H_{22}(\zeta, w) = {} & 4\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(y-\eta)^2}{|z-\zeta|^2} \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(y-\beta)^2}{|z-w|^2} \mathrm{d}s_z \\
& + 4\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{|z-\zeta|^2} \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(x-\alpha)(y-\beta)}{|z-w|^2} \mathrm{d}s_z \\
& + 4\int_\Sigma^* \frac{\partial}{\partial s_z} \log|z-\zeta| \frac{\partial}{\partial s_z} \log|z-w|\, \mathrm{d}s_z \\
& + 4\int_\Sigma^* \left(\frac{\partial}{\partial s_z} \log|z-\zeta| \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(y-\beta)^2}{|z-w|^2} + \frac{\partial}{\partial s_z} \log|z-w| \frac{\partial}{\partial s_z} \frac{(y-\eta)^2}{|z-\zeta|^2}\right) \mathrm{d}s_z .
\end{aligned}$$

Si ha

$$H_{ij}(z, \zeta) = O\left(\frac{1}{|z-\zeta|^{1-h}}\right) \qquad i, j = 1, 2. \tag{4.14}$$

Tali nuclei sono quindi dotati di singolarità deboli su Σ e di conseguenza gli operatori R_{11}, R_{12}, R_{22} sono operatori compatti di $L^2(\Sigma)$ in sè. Gli operatori R_{11}, R_{22} sono anche autoaggiunti; ciò segue dal fatto che le funzioni H_{11}, H_{22} sono simmetriche.

Definiamo in S gli *operatori*

$$T(\varphi) = (J_{11}(\varphi_1) + J_{12}(\varphi_2),\ J_{12}^*(\varphi_1) + J_{22}(\varphi_2))$$

$$L(\varphi) = (R_{11}(\varphi_1) + R_{12}(\varphi_2),\ R_{12}^*(\varphi_1) + R_{22}(\varphi_2))$$

essendo J_{11}, J_{12}, J_{22}, R_{11}, R_{12}, R_{22} gli operatori dati dalle (4.9), (4.12) e J_{12}^*, R_{12}^* gli operatori aggiunti di J_{12}, R_{12}. Verifichiamo che tali operatori sono compatti.

Consideriamo una successione $\{\varphi^n\}$ dello spazio S convergente debolmente ad un elemento φ di S. Ricordando che J_{11}, J_{12}, J_{22} sono operatori compatti, si ha

$$\lim_{n\to\infty} |||T\varphi^n - T\varphi|||^2 \leq 2 \lim_{n\to\infty} (\|J_{11}(\varphi_1^n - \varphi_1)\|^2 + \|J_{12}(\varphi_2^n - \varphi_2)\|^2)$$
$$+ 2 \lim_{n\to\infty} (\|J_{12}^*(\varphi_1^n - \varphi_1)\|^2 + \|J_{22}(\varphi_2^n - \varphi_2)\|^2) = 0.$$

In modo analogo si dimostra che L è un operatore compatto. È facile poi verificare che gli operatori T ed L sono autoaggiunti.

Dalle (4.8), (4.11) segue infine la (4.7).

Indichiamo con Y *la varietà lineare generata dalle funzioni* $\gamma^{(0)}$, $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, introdotte nel numero 2, e con X *il complemento ortogonale di* Y.

Teorema 11. *Poniamo*

$$\Lambda^2 = \sup_{\varphi\in X-\{0\}} \frac{[\varphi, T_1\varphi]}{|||\varphi|||^2} \qquad \tilde{\lambda}^2 = 4\pi^2 + \sup_{\varphi\in X-\{0\}} \frac{[\varphi, L_1\varphi]}{|||\varphi|||^2} \tag{4.15}$$

essendo T_1 *ed* L_1 *le restrizioni degli operatori* T *ed* L *allo spazio* X. *Si ha* $H \leq \Lambda\tilde{\lambda}^{-1}$ *essendo* H *la costante della* (3). *È inoltre* $\tilde{\lambda} \neq 0$.

Nel Teorema 10 abbiamo stabilito la (4.7).

Indichiamo ora con $A(T)$ ed $A(L)$, rispettivamente, gli *autoinsiemi degli ope-*

ratori T ed L. Determiniamo esplicitamente tali insiemi. Se u e v sono funzioni biarmoniche, rappresentabili mediante potenziali di semplice strato, di densità rispettivamente φ e ψ, si ha

$$\int_\Omega (u_{xx} v_{xx} + 2u_{xy} v_{xy} + u_{yy} v_{yy})\, dx\, dy = [\varphi, T\psi]$$

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial}{\partial s} u_x \frac{\partial}{\partial s} v_x + \frac{\partial}{\partial s} u_y \frac{\partial}{\partial s} v_y \right) ds = [\varphi, L\psi] + 4\pi^2 [\varphi, \psi].$$

Siano $\gamma^{(1)}(z)$ e $\gamma^{(2)}(z)$ le *autosoluzioni di seconda specie* e $\gamma^{(0)}$ l'*autosoluzione di prima specie* del sistema (2.3). Ponendo $\psi = \gamma^{(k)}$ $k = 0, 1, 2$, si ha $v_x(z) = c_1$ $z \in \overline{\Omega}$, $v_y(z) = c_2$ $z \in \overline{\Omega}$; e quindi

$$(4.16) \qquad [\varphi, T\psi] = 0 \quad \forall \varphi \in S \qquad [\varphi, \overline{L}\psi] = 0 \quad \forall \varphi \in S$$

dove $\overline{L} = L + 4\pi^2 I$.

Dalle (4.16) si deduce $Y \subseteq A(T)$, $Y \subseteq A(\overline{L})$. Dimostriamo ora che, se $\varphi \in A(T)$, necessariamente deve essere $\varphi \in Y$. Dalla prima delle (4.7) segue che $u_{xx}(z) = u_{xy}(z) = u_{yy}(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$, cioè $u(z) = d_0 + d_1 x + d_2 y$ $(d_0, d_1, d_2) \in R^3$. Ciò è possibile se e solo se $\varphi = a_0 \gamma^{(0)} + a_1 \gamma^{(1)} + a_2 \gamma^{(2)}$ $(a_0, a_1, a_2) \in R^3$. In modo analogo si dimostra che $Y = A(\overline{L})$.

Il sottospazio Y è *invariante* per gli operatori T ed $\overline{L}$. Essendo T ed $\overline{L}$ operatori autoaggiunti si ha che anche il sottospazio X è *invariante* per T ed $\overline{L}$ e quindi per gli operatori T e L.

Ha senso, a questo punto, considerare gli operatori T_1 e L_1 *restrizioni* di T ed L allo spazio X. T_1 e L_1 sono operatori compatti ed autoaggiunti di X in sè. Poichè $S = X \oplus Y$ si ha

$$H^2 = \sup_{\varphi \in X - \{0\}} \frac{[\varphi, T_1 \varphi]}{[\varphi, L_1 \varphi] + 4\pi^2 |||\varphi|||^2}.$$

Tenuta presente la (4.15), si ha $H \leq \Lambda \tilde{\lambda}^{-1}$.

Deve essere poi $\tilde{\lambda} \neq 0$. Se così non fosse, esisterebbe una successione $\{\varphi^n\}$ contenuta in X tale che

$$(4.17) \qquad |||\varphi^n||| = 1 \qquad \lim_{n \to \infty} ([\varphi^n, L_1 \varphi^n] + 4\pi^2) = 0.$$

Dalla prima delle (4.17) si deduce che esiste una sottosuccessione, che continueremo ad indicare con $\{\varphi^n\}$, convergente debolmente ad un elemento φ di X.

Sia $u_n(z)$ la funzione biarmonica rappresentata mediante un potenziale di densità φ^n e $u(z)$ quella di densità φ. Si ottiene

$$\text{(4.18)}\quad \lim_{n\to\infty} \|u^n(z) - u(z)\| = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \|u_x^n - u_x\| = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \|u_y^n - u_y\| = 0 .$$

Dalla seconda delle (4.17) segue che le successioni $\{\frac{\partial}{\partial s} u_x^n\}$ e $\{\frac{\partial}{\partial s} u_y^n\}$ sono convergenti nello spazio $L^2(\Sigma)$; verificano quindi la condizione di Cauchy in $L^2(\Sigma)$. Le funzioni u_x e u_y sono perciò dotate di derivate tangenti forti e tali derivate sono nulle. Si ottiene quindi $u_x(z) = c_1$, $u_y(z) = c_2$ $z \in \overline{\Omega}$, cioè $u(z) = c_0 + c_1 x + c_2 y$ $z \in \overline{\Omega}$ $(c_0, c_1, c_2) \in \boldsymbol{R}^3$. Ciò, abbiamo visto, è possibile se e solo se

$$\varphi = a_0 \gamma^{(0)} + a_1 \gamma^{(1)} + a_2 \gamma^{(2)} \qquad (a_0, a_1, a_2) \in R^3 .$$

Deve essere $\varphi(z) = 0$ $\forall z \in \Sigma$ dal momento che $\varphi \in X$.

Le funzioni $\frac{\partial}{\partial s} u_x^n$, $\frac{\partial}{\partial s} u_y^n$ possono essere così rappresentate

$$\frac{\partial}{\partial s} u_x^n = Q\varphi_1^n + R_1 \varphi_1^n + R_2 \varphi_2^n \qquad \frac{\partial}{\partial s} u_y^n = Q\varphi_2^n + R_3 \varphi_1^n + R_4 \varphi_2^n$$

essendo Q un operatore singolare, R_1, R_2, R_3, R_4 operatori compatti di $L^2(\Sigma)$ in sè. Sia Q' l'operatore riducente Q; Q' è un operatore continuo ed è tale che $Q'Q = I + R$ con R operatore compatto. Si ottiene allora

$$Q'(\frac{\partial}{\partial s} u_x^n) = \varphi_1^n + \overline{R}_1 \varphi_1^n + \overline{R}_2 \varphi_2^n \qquad Q'(\frac{\partial}{\partial s} u_y^n) = \varphi_2^n + \overline{R}_3 \varphi_1^n + \overline{R}_4 \varphi_2^n .$$

Dalla seconda delle (4.17), tenendo conto che $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \overline{R}_3, \overline{R}_4$ sono operatori compatti e che $\varphi = 0$, si ottiene: $\lim_{n\to\infty} |||\varphi^n||| = 0$; ciò è assurdo.

Vogliamo ora indicare un metodo di calcolo delle costanti Λ e $\tilde{\lambda}$. Indichiamo con $\{w_k\}$ un *sistema ortonormale completo* di vettori nello spazio S e consideriamo le successioni $\{\lambda_1^{(\nu)}\}$, $\{\gamma_\nu\}$, $\{\lambda_4^{(\nu)}\}$, $\{\tilde{\gamma}_\nu\}$ così definite

$\lambda_1^{(\nu)}$ *radice dell'equazione* $\det((Tw_i, w_j) - \lambda(w_i, w_j)) = 0$ $i, j = 1, \ldots, \nu$ (abbiamo ordinato le radici come nel Teorema 3)

$$\gamma_\nu = (\mathscr{T}^n(T^2) - \mathscr{T}^n((P_\nu T P_\nu)^2) + (\lambda_1^{(\nu)})^{2n})^{\frac{1}{2n}}$$

$\lambda_4^{(\nu)}$ *radice dell'equazione* $\det((Lw_i, w_j) - \lambda(w_i, w_j)) = 0$ $i, j = 1, \ldots, \nu$ (abbiamo ordinato le radici come nel Teorema 7)

$$\widetilde{\gamma}_\nu = -(\mathscr{T}^n(L^2) - \mathscr{T}^n((P_\nu L P_\nu)^2) + (\lambda_4^{(\nu)})^{2n})^{\frac{1}{2n}}$$

essendo T ed L gli operatori introdotti nel Teorema 10.

Teorema 12. *Per le quantità* Λ^2, $\widetilde{\lambda}^2$ *definite dalla* (4.15) *risulta*

$$\lambda_1^{(\nu)} \leqslant \lambda_1^{(\nu+1)} \leqslant \Lambda^2 \leqslant \gamma_{\nu+1} \leqslant \gamma_\nu \qquad \lim_{\nu\to\infty} \lambda_1^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \gamma_\nu = \Lambda^2 \tag{4.19}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{\gamma}_\nu + 4\pi^2 \leqslant \widetilde{\gamma}_{\nu+1} + 4\pi^2 \leqslant \widetilde{\lambda}^2 \leqslant \lambda_4^{(\nu+1)} + 4\pi^2 \leqslant \lambda_4^{(\nu)} + 4\pi^2 \\ \lim_{\nu\to\infty} \widetilde{\gamma}_\nu + 4\pi^2 = \lim_{\nu\to\infty} \widetilde{\lambda}_4^{(\nu)} + 4\pi^2 = \widetilde{\lambda}^2 . \end{gathered} \tag{4.20}$$

Verifichiamo dapprima le (4.19).

Osserviamo che, indicato con $\Gamma(T)$ l'*insieme degli autovalori* di T, si ha $\Gamma(T) - \{0\} = \Gamma(T_1)$. Possiamo quindi scrivere

$$\Lambda^2 = \sup_{\varphi \in S - \{0\}} \frac{[T\varphi, \varphi]}{|||\varphi|||^2} .$$

Per quanto scritto nel numero **3**, per verificare le (4.19) basta dimostrare che il PCO T^2 appartiene alla classe $\mathscr{C}^n$ per qualche n. Consideriamo l'insieme A dato dal prodotto cartesiano di Σ per la retta reale. Sia μ la misura prodotto della misura di Lebesgue definita su Σ e una misura di Dirac diversa da zero solo nei punti 1 e 2. Indichiamo con $\varphi_i(z)$ il valore della funzione $\varphi(z, t) \in L^2(A, \mu)$ ($z \in \Sigma$, $t \in \boldsymbol{R}$) quando $t = i$ ed $i \in \{1, 2\}$. Si ha

$$(\varphi, \psi)_{L^2(A,\mu)} = \sum_{i=1,2} \int_\Sigma \varphi_i(z) \psi_i(z) \, ds .$$

Lo spazio S è congruente allo spazio $L^2(A, \mu)$ ora definito. L'operatore T è unitariamente equivalente all'operatore T_i, definito da

$$T_i \varphi = \sum_{j=1,2} \int_\Sigma K_{ij}(z, \zeta) \varphi_j(\zeta) \, ds_\zeta \qquad i = 1, 2 .$$

dove le $K_{ij}(z, \zeta)$ sono date dalle (4.10). Poichè risulta

$$K_{ij}(z, \zeta) = O(c + \log|z - \zeta|) \qquad K_{ij}(z, \zeta) = K_{ji}(\zeta, z)$$

sono verificate tutte le ipotesi del Teorema 5 con $n = 1$.

Si osservi che nella costruzione della successione $\{\gamma_\nu\}$ interviene l'invariante ortogonale $\mathscr{T}$ di cui possiamo dare l'espressione esplicita

$$\mathscr{T}(T^2) = \sum_{i,j}^{1,2} \int_\Sigma ds_\zeta \int_\Sigma |K_{ij}(z, \zeta)|^2 ds_z .$$

Dimostriamo ora le (4.20). Si osservi che basta calcolare

$$\lambda = \inf_{\varphi \in X - \{0\}} \frac{[\varphi, L_1 \varphi]}{|||\varphi|||^2} .$$

L_1 è un operatore compatto; deve quindi essere $\lambda \leqslant 0$. L'autovalore $\mu = -4\pi^2$ dell'operatore L ha molteplicità tre (ad esso corrispondono infatti tre autovettori linearmente indipendenti). Ordinando l'insieme degli autovalori non positivi di L in ordine non decrescente si ottiene che $\mu = -4\pi^2$ è il più piccolo di tali autovalori e se $\lambda < 0$, λ viene ad essere il quarto autovalore (abbiamo contato μ con la sua molteplicità). In ogni caso risulta $\lambda = \mu_4$ (per le definizione di μ_4 cfr. il numero 3). I Teoremi 7, 8 ci forniscono due successioni approssimanti λ per eccesso e per difetto se $L^2 \in \mathscr{C}^n$ per qualche n. Consideriamo, come prima, lo spazio $L^2(A, \mu)$ congruente allo spazio S. L'operatore L è unitariamente equivalente all'operatore L_i definito da

$$L_i \varphi = \sum_{j=1,2} \int_\Sigma \varphi_j(\zeta) H_{ij}(z, \zeta)\, ds_\zeta \qquad i = 1, 2$$

dove i nuclei $H_{ij}(z, \zeta)$ sono dati dalle (4.13) e verifichiamo la (4.14).

Ponendo allora $\quad H^n_{ij}(z, \zeta) = \int_\Sigma H^{n-1}_{ij}(z, w) H_{ij}(w, \zeta)\, ds_w$

si ha
$$L^n_i \varphi = \sum_{j=1,2} \int_\Sigma \varphi_j(\zeta) H^n_{ij}(z, \zeta)\, ds_\zeta .$$

Anche $H^n_{ij}(z, \zeta)$ è un nucleo simmetrico. Si ha inoltre

$$H^n_{ij}(z, \zeta) = O\Big(\frac{1}{|z - \zeta|^{1-nh}}\Big).$$

$H^n_{ij}(z, \zeta)$ appartiene quindi allo spazio $L^2(A \times A, \mu \times \mu)$ se $n > \dfrac{1}{2h}$. Per tali n l'operatore L^2 appartiene alla classe $\mathscr{C}^n$. Anche in questo caso siamo nelle ipotesi del Teorema 5. La teoria svolta nel numero 3 permette di concludere che

$$\tilde{\gamma}_\nu \leqslant \tilde{\gamma}_{\nu+1} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_4^{(\nu+1)} \leqslant \lambda_4^{(\nu)} \qquad \lim_{\nu\to\infty} \tilde{\gamma}_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \lambda_4^{(\nu)} = \lambda .$$

Essendo $\tilde{\lambda}^2 = \lambda + 4\pi^2$ si ottengono le (4.20).

Avendo supposto $h > \dfrac{1}{2}$, si ha $L^2 \in \mathscr{C}^1$ e si può esprimere esplicitamente il primo invariante ortogonale

$$\mathscr{T}(L^2) = \sum_{i,j}^{1,2} \int_\Sigma \mathrm{d}s_z \int_\Sigma |H_{ij}(z,\zeta)|^2 \mathrm{d}s_\zeta .$$

In conclusione abbiamo ottenuto

$$\frac{\lambda_1^{(\nu)}}{4\pi^2 + \lambda_4^{(\nu)}} \leqslant (\Lambda\tilde{\lambda}^{-1})^2 \leqslant \frac{\gamma_\nu}{4\pi^2 + \tilde{\gamma}_\nu}$$

dove le espressioni che compaiono sono tutte esplicitamente calcolabili. Naturalmente l'ultima disuguaglianza è valida non appena è $\tilde{\gamma}_\nu > -4\pi^2$. Poiché $H \leqslant \Lambda\tilde{\lambda}^{-1}$ è evidente che è proprio questa disuguaglianza ad avere maggiore interesse fra le due.

5 - Il caso particolare di un campo circolare

Sia $\Omega = D_R(0)$ il disco di centro l'origine e raggio R. Vogliamo calcolare le costanti K ed H che intervengono nella (2) e nella (3).

Considereremo solo il caso in cui Ω ha raggio unitario. Ciò non è restrittivo poichè introducendo in $D_R(0)$ un sistema di coordinate polari $z = \rho e^{i\theta}$, si ha

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} = R\int_0^R \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} (R^2u^2 + (1 + \frac{1}{R^2\rho^2})u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}(1 + \frac{2}{R^2\rho^2})u_\theta^2)\,\mathrm{d}\theta$$

$$+ \frac{1}{R}\int_0^R \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} (u_{\rho\rho}^2 + \frac{2}{\rho^2}u_{\rho\theta}^2 - \frac{4}{\rho^3}u_\theta u_{\rho\theta} + \frac{1}{\rho^4}u_{\theta\theta}^2 + \frac{2}{\rho^3}u_\rho u_{\theta\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

(5.1)

$$\|u\|^2_{L^2(\Sigma)} + \|\frac{\partial u_x}{\partial s}\|^2_{L^2(\Sigma)} + \|\frac{\partial u_y}{\partial s}\|^2_{L^2(\Sigma)}$$

$$= R\int_0^{2\pi} (u^2 + \frac{1}{R^4\rho^2}u_\rho^2 + \frac{1}{R^4\rho^4}u_\theta^2 + \frac{1}{R^4\rho^2}u_{\rho\theta}^2 + \frac{1}{R^4\rho^4}u_{\theta\theta}^2 + \frac{2}{R^4\rho^3}u_\rho u_{\theta\theta} - \frac{2}{R^4\rho^3}u_\theta u_{\rho\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

Consideriamo allora le *norme*

$$\|u\|^2_{D_R(0)} = R\int_0^R \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{R^2}u^2 + u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}u_\theta^2 + R^2\Big(\frac{1}{\rho^2}u_\rho^2 + \frac{2}{\rho^4}u_\theta^2\Big)\Big)\,\mathrm{d}\theta$$

$$(5.2)\qquad + R^3\int_0^R \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \Big(u_{\rho\rho}^2 + \frac{2}{\rho^2}u_{\rho\theta}^2 - \frac{4}{\rho^3}u_\theta u_{\theta\rho} + \frac{1}{\rho^4}u_{\theta\theta}^2 + \frac{2}{\rho^3}u_\rho u_{\theta\theta}\Big)\,\mathrm{d}\theta$$

$$\|u\|^2_{\partial D_R(0)} = R\int_0^{2\pi} \Big(u^2 + R^4\Big(\frac{1}{\rho^2}u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^4}u_\theta^2 + \frac{1}{\rho^4}u_{\theta\theta}^2 + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\rho}^2 + \frac{2}{\rho^3}u_\rho u_{\theta\theta} - \frac{2}{\rho^3}u_\theta u_{\rho\theta}\Big)\Big)\,\mathrm{d}\theta.$$

Se $R = 1$ *le norme definite dalle* (5.1), (5.2) *coincidono*; *per* $R \neq 1$ *tali norme sono equivalenti.* Le norme definite dalle (5.2) sono tali che

$$\|u\|^2_{D_R(0)} = R\|u\|^2_{D_1(0)} \qquad \|u\|^2_{\partial D_R(0)} = R\|u\|^2_{\partial D_1(0)}\,;$$

da ciò si ottiene che la costante K da noi cercata *non dipende* da R.

In modo analogo possiamo considerare le *seminorme*

$$R^3\int_0^R \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{\rho^2}u_\rho^2 + \frac{2}{\rho^4}u_\theta^2 + u_{\rho\rho}^2 + \frac{2}{\rho^2}u_{\rho\theta}^2 + \frac{1}{\rho^4}u_{\theta\theta}^2 - \frac{4}{\rho^3}u_\theta u_{\theta\rho} + \frac{2}{\rho^3}u_\rho u_{\theta\theta}\Big)\,\mathrm{d}\theta$$

$$R^5\int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{\rho^2}u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^4}u_\theta^2 + \frac{1}{\rho^4}u_{\theta\theta}^2 + \frac{1}{\rho^2}u_{\rho\theta}^2 + \frac{2}{\rho^3}u_\rho u_{\theta\theta} - \frac{2}{\rho^3}u_\theta u_{\rho\theta}\Big)\,\mathrm{d}\theta.$$

Tali seminorme sono equivalenti alle seminorme

$$\int_\Omega (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \int_\Sigma \Big(\Big(\frac{\partial}{\partial s}u_x\Big)^2 + \Big(\frac{\partial}{\partial s}u_y\Big)^2\Big)\,\mathrm{d}s$$

e nel caso del disco unitario coincidono con esse. Considerando tali seminorme ci si può ricondurre, anche per il calcolo di H, a considerare solo il caso $R = 1$.

Teorema 13. *Se* $\Omega = D_1(0)$ *sussistono la* (2) *e la* (3) *con*

$$K = \sqrt{\frac{545 + \sqrt{4353}}{384}} \qquad H = \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

Le costanti ottenute sono ottimali.

Ogni funzione biarmonica in $D_1(0)$ ammette la rappresentazione $u = u_0 + (1-\rho)^2 u_1$ con u_0 ed u_1 funzioni armoniche in $D_1(0)$ (cfr. [21]). Si ha quindi

$$(5.3)\quad \begin{aligned} u = {} & \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left(\frac{a_k}{\sqrt{\pi}} \cos k\theta + \frac{b_k}{\sqrt{\pi}} \sin k\theta\right) + \\ & + (1-\rho^2)\left[\frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \left(\frac{c_k}{\sqrt{\pi}} \cos k\theta + \frac{d_k}{\sqrt{\pi}} \sin k\theta\right)\right] \end{aligned}$$

essendo (a_k, b_k, c_k, d_k) costanti reali. Le serie a secondo membro della (5.3) sono uniformemente convergenti all'interno di $D_1(0)$.

Calcoliamo dapprima la costante K. Le funzioni $u_0(z)$ e $u_1(z)$ appartengono allo spazio $C^{2+H}(\overline{\Omega})$ (poichè a tale spazio appartiene la $u(z)$) e quindi le funzioni $\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} u_0(1, \theta)$, $\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} u_1(1, \theta)$ appartengono allo spazio $L^2(\Sigma)$. Sfruttando il teorema di Parseval si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 (a_k^2 + b_k^2) < \infty \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^4 (c_k^2 + d_k^2) < \infty .$$

Da ciò segue che le serie seguenti sono convergenti ed inoltre da (5.2), (5.3) si trae

$$(5.4)\quad \begin{aligned} \|u\|^2_{D_1(0)} &= \sum_{k=1}^{\infty} (m_k (a_k^2 + b_k^2) + n_k (c_k^2 + d_k^2) + 2p_k (a_k c_k + b_k d_k)) \\ \|u\|^2_{\partial D_1(0)} &= \sum_{k=1}^{\infty} (q_k (a_k^2 + b_k^2) + r_k (c_k^2 + d_k^2) + 2s_k (a_k c_k + b_k d_k)), \end{aligned}$$

essendo

$$m_k = \frac{4k^4 - 2k^2 + 2k + 1}{2(k+1)} \qquad n_k = \frac{8k^4 + 52k^3 + 114k^2 + 100k + 31}{(k+1)(k+2)(k+3)} \qquad s_k = -2k(k-1)^2$$

$$p_k = \frac{-4k^4 - 8k^3 + 4k^2 + 8k + 1}{2(k+1)(k+2)} \qquad q_k = 2k^4 - 4k^3 + 2k^2 + 1 \qquad r_k = 4(k^2+1) .$$

Vogliamo determinare $\displaystyle K_n^2 = \sup_{(x,y) \in R^2 - \{(0,0)\}} \frac{m_n x^2 + n_n y^2 + 2p_n xy}{q_n x^2 + r_n y^2 + 2s_n xy}$.

Si ha $\displaystyle K_0^2 = \frac{43 + \sqrt{397}}{48} \qquad K_1^2 = \frac{545 + \sqrt{4353}}{384}$.

Se $n \geqslant 2$ poniamo

$$\overline{K}_n^2 = K_n^2\, 4n(n+1)(n+2)(n-1)^2 - (4n^4 + 8n^3 - 4n^2 - 8n - 1)$$

$$\overline{m}_n = 4n^6 + 4n^5 - 12n^4 - 16n^3 + 8n^2 + 12n + 1$$

$$\overline{n}_n = \frac{4}{(n+3)}(4n^7 + 16n^6 - 6n^5 - 76n^4 - 50n^3 + 61n^2 + 56n + 3).$$

Si ha $$\overline{K}_n^2 = \sup_{(x,\, y) \in R^2 - \{(0,\, 0)\}} \frac{\overline{m}_n x^2 + \overline{n}_n y^2}{q_n x^2 + r_n y^2 + 2 s_n xy}.$$

Come è noto $\overline{K}_n^2$ è la più grande radice dell'equazione

$$\begin{vmatrix} \overline{m}_n - \lambda q_n & -s_n \lambda \\ -s_n \lambda & \overline{n}_n - r_n \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ossia $$\overline{K}_n^2 = \frac{\overline{m}_n r_n + \overline{n}_n q_n + ((\overline{m}_n r_n + \overline{n}_n q_n)^2 - 4\overline{m}_n \overline{n}_n (q_n r_n - s_n^2))^{\frac{1}{2}}}{2(q_n r_n - s_n^2)}$$

essendo $$q_n r_n - s_n^2 = 4n^6 - 8n^4 + 8n^2 + 4 > 0 \qquad \forall n \geqslant 2.$$

Si ha quindi

$$K_n^2 = (\overline{K}_n^2 + (4n^4 + 8n^3 - 4n^2 - 8n - 1))(4n(n+1)(n+2)(n-1)^2)^{-1}.$$

Si può verificare con alcuni calcoli che: $K_n^2 \leqslant K_1^2$ $\forall n \geqslant 0$; si ottiene quindi che

$$K = K_1 = \sqrt{\frac{545 + \sqrt{4353}}{384}}. \tag{5.5}$$

Tale costante è ottimale. Siano infatti a_1, c_1 le soluzioni del sistema

$$m_1 x - K^2(q_1 x + s_1 y) = 0 \qquad n_1 y - K^2(r_1 y + s_1 x) = 0$$

essendo K la costante data dalla (5.5). La funzione

$$u(\rho, \theta) = \rho\left(a_1 \frac{\cos\theta}{\sqrt{\pi}} + a_1 \frac{\sin\theta}{\sqrt{\pi}}\right) - \rho^3\left(c_1 \frac{\cos\theta}{\sqrt{\pi}} + c_1 \frac{\sin\theta}{\sqrt{\pi}}\right)$$

è tale che
$$\frac{\|u\|^2_{D_1(0)}}{\|u\|^2_{\partial D_1(0)}} = K_1^2 = K^2 .$$

Calcoliamo ora la costante H. Rappresentando la funzione biarmonica u tramite la (5.3), si ottiene

$$\int_{D_1(0)} (u_{xx}^2+2u_{xy}^2+u_{yy}^2)\,dx\,dy = \sum_{k=0}^{\infty} (f_k(a_k^2+b_k^2)+g_k(c_k^2+d_k^2)-2h_k(a_k c_k+b_k d_k))$$

(5.6)

$$\int_{\partial D_1(0)} ((\frac{\partial}{\partial s}u_x)^2+(\frac{\partial}{\partial s}u_y)^2)\,ds = \sum_{k=0}^{\infty} (l_k(a_k^2+b_k^2)+m_k(c_k^2+d_k^2)-2n_k(a_k c_k+b_k d_k))$$

essendo

$$f_k = k^2(k-1) \qquad g_k = 2(2k+1) \qquad h_k = k(k-1)$$

(5.7)

$$l_k = k^2(k-1)^2 \qquad m_k = 2(k^2+1) \qquad n_k = k(k-1)^2 .$$

Vogliamo calcolare i numeri

$$H_k^2 = \sup_{(x,y)\in R^2-\{(0,0)\}} \frac{f_k x^2 + g_k y^2 - 2h_k xy}{l_k x^2 + m_k y^2 - 2n_k xy} .$$

Si ha $H_0^2 = 1$, $H_1^2 = \frac{3}{2}$.

Ponendo
$$\overline{H}_k^2 = H_k^2 - \frac{1}{k-1} \qquad \overline{g}_k = k^2 - k - 2$$

si ottiene
$$\overline{H}_k^2 = \frac{2}{k-1} \sup_{(x,y)\in R^2-\{(0,0)\}} \frac{\overline{g}_k y^2}{l_k x^2 + m_k y^2 - 2n_k xy} .$$

$\frac{k-1}{2}\overline{H}_k^2$ è la più grande radice dell'equazione $\begin{vmatrix} -\lambda l_k & \lambda n_k \\ \lambda n_k & \overline{g}_k - \lambda m_k \end{vmatrix} = 0.$

Essendo
$$\frac{\overline{g}_k l_k}{l_k m_k - n_k^2} = \frac{k-2}{k+1} \geqslant 0 \qquad \forall k \geqslant 0$$

si ha $\overline{H}_k^2 = \dfrac{2(k-2)}{k^2-1}$ cioè $H_k^2 = \dfrac{3}{k+1}$. Si ottiene quindi

$$H = H_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}. \tag{5.8}$$

Tale costante è ottimale. Considerata infatti la funzione biarmonica $u(\rho, \theta) = (1-\rho^2)\cos\theta$ si ha

$$\int_{D_1(0)} (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\, dx\, dy = \frac{3}{2} \int_{\partial D_1(0)} \left(\left(\frac{\partial}{\partial s} u_x\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial s} u_y\right)^2\right) ds\,.$$

Vogliamo ora stabilire un confronto numerico, nel caso del disco unitario, tra la costante di maggiorazione H ottenuta col metodo generale esposto nel numero precedente e la costante H espressa dall'ultimo teorema.

Consideriamo allora il metodo generale nel caso particolare in cui $\Omega = D_1(0)$. Rappresentiamo la funzione biarmonica u tramite la (2.1). Introducendo in Ω coordinate polari $z = \rho e^{i\theta}$, $\zeta = re^{i\psi}$, si ottiene

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta) = \int_0^{2\pi} \left(\gamma_1(\psi) \frac{\partial}{\partial r} S_0(z, \zeta) + \gamma_2(\psi) \frac{\partial}{\partial \psi} S_0(z, \zeta)\right) d\psi \\ + k_0 + k_1 \rho \cos\theta + k_2 \rho \sin\theta \qquad \rho < 1 \end{aligned} \tag{5.9}$$

avendo posto

$$\gamma_1(\psi) = \varphi_1(\zeta)\cos\psi + \varphi_2(\zeta)\sin\psi \qquad \gamma_2(\psi) = -\varphi_1(\zeta)\sin\psi + \varphi_2(\zeta)\cos\psi.$$

Si verifica che, rappresentando la funzione biarmonica u mediante la (5.9), lo spazio X, prima introdotto, è costituito dalle coppie $(\gamma_1(\psi), \gamma_2(\psi)) \in S$ ortogonali alle coppie $(0, 1)$, $(\sin\psi, \cos\psi)$, $(\cos\psi, -\sin\psi)$.

Indichiamo con (α_k, β_k), (δ_k, λ_k) i coefficienti di Fourier delle funzioni γ_1, γ_2. Si ha che $(\gamma_1(\psi), \gamma_2(\psi)) \in X$ se e solo se

$$\delta_0 = 0 \qquad \beta_1 + \delta_1 = 0 \qquad \alpha_1 - \lambda_1 = 0\,. \tag{5.10}$$

Nel numero 4 abbiamo dimostrato che $H \leq \Lambda \tilde{\lambda}^{-1}$, essendo

$$\Lambda^2 = \sup_{\gamma \in X - \{0\}} \frac{\int_\Omega (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\, dx\, dy}{|||\gamma|||^2} \qquad \tilde{\lambda}^2 = \inf_{\gamma \in X - \{0\}} \frac{\int_\Sigma \left(\left(\frac{\partial}{\partial s} u_x\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial s} u_y\right)^2\right) ds}{|||\gamma|||^2}\,.$$

Vogliamo determinare le costanti Λ, $\tilde{\lambda}$. A questo scopo è utile determinare una relazione fra i coefficienti di Fourier delle funzioni $\gamma_1(\psi)$, $\gamma_2(\psi)$ e i coefficienti (a_k, b_k, c_k, d_k).

La funzione $S_0(z, \zeta) = |z-\zeta|^2 \log|z-\zeta|$ ammette, per ogni z tale che $|z| < 1$, lo sviluppo in serie

$$S_0(z, \zeta) = -(\rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\theta - \psi)) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rho^k \cos k(\theta - \psi). \tag{5.11}$$

La serie a secondo membro della (5.11) converge uniformemente in ogni compatto contenuto nel disco unitario e converge in norma L^2 in tutto il disco.

Poniamo

$$\gamma_1(\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k \cos k\psi + \beta_k \sin k\psi) \qquad \gamma_2(\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} (\delta_k \cos k\psi + \lambda_k \sin k\psi) \tag{5.12}$$

essendo

$$\begin{aligned} &\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_1(\psi)\,d\psi && \delta_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_2(\psi)\,d\psi \\ &\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_1(\psi)\cos k\psi\,d\psi && \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_1(\psi)\sin k\psi\,d\psi \quad k \geqslant 1 \\ &\delta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_2(\psi)\cos k\psi\,d\psi && \lambda_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_2(\psi)\sin k\psi\,d\psi \quad k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Sostituendo la (5.11) nella (5.9) e tenendo conto delle (5.13) si ottiene

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta) &= 2\pi\alpha_0 + k_0 + 2\pi\alpha_0\rho^2 \\ &+ \pi\rho(\cos\theta(-3\alpha_1 + \lambda_1 + k_1\pi^{-1}) + \sin\theta(-3\beta_1 - \delta_1 + k_2\pi^{-1})) + \\ &+ \pi\sum_{k=2}^{\infty} \rho^k(\cos k\theta(\frac{2-k}{k(k-1)}\alpha_k - \frac{1}{k-1}\lambda_k) + \sin k\theta(\frac{2-k}{k(k-1)}\beta_k + \frac{1}{k-1}\delta_k)) + \\ &+ \pi\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+2}(\cos k\theta(\frac{1}{k+1}\alpha_k + \frac{1}{k+1}\lambda_k) + \sin k\theta(\frac{1}{k+1}\beta_k - \frac{1}{k+1}\delta_k)). \end{aligned} \tag{5.14}$$

D'altra parte nel cerchio unitario la funzione biarmonica u può rappresentarsi tramite la (5.3). Confrontando allora la (5.14) e la (5.3) si ottiene

$$a_0 = \sqrt{2\pi}(4\pi\alpha_0 + k_0) \qquad c_0 = -2\pi\sqrt{2\pi}\alpha_0$$

$$a_1 = \sqrt{\pi}(-\frac{5}{2}\pi\alpha_1 + \frac{3}{2}\pi\lambda_1 + k_1) \qquad b_1 = \sqrt{\pi}(-\frac{5}{2}\pi\beta_1 - \frac{3}{2}\pi\delta_1 + k_2)$$

$$a_k = \pi^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{k(k^2-1)}\alpha_k - \frac{2}{k^2-1}\lambda_k\right) \quad k \geqslant 2 \qquad b_k = \pi^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{k(k^2-1)}\beta_k + \frac{2}{k^2-1}\delta_k\right) \quad k \geqslant 2$$

$$c_k = \pi^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{k+1}\alpha_k - \frac{1}{k+1}\lambda_k\right) \quad k \geqslant 1 \qquad d_k = \pi^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{k+1}\beta_k + \frac{1}{k+1}\delta_k\right) \quad k \geqslant 1.$$

Queste relazioni mostrano che per $k \geqslant 2$ si ha corrispondenza biunivoca fra i coefficienti (a_k, b_k, c_k, d_k) e i coefficienti di Fourier delle funzioni $\gamma_1(\psi)$, $\gamma_2(\psi)$. Da esse e dalla (5.6) si ottiene con alcuni calcoli

$$\int_{D_1(0)} (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)\, dx\, dy = 32\pi^3 \alpha_0^2 + 3\pi^3(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \lambda_1^2 + \delta_1^2 + 2\alpha_1\lambda_1 - 2\beta_1\delta_1)$$

$$+4\pi^3 \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2k-1}{k^2-1}(\alpha_k^2+\beta_k^2) + \frac{2k-1}{k^2-1}(\delta_k^2+\lambda_k^2) + 2\frac{k^2+k-4}{(k+1)^2(k-1)}(\alpha_k\lambda_k - \beta_k\delta_k)\right)$$

$$\int_{\partial D_1(0)} \left(\left(\frac{\partial}{\partial s}u_x\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial s}u_y\right)^2\right) ds = 32\pi^3\alpha_0^2 + 2\pi^3(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \lambda_1^2 + \delta_1^2 + 2\alpha_1\lambda_1 - 2\beta_1\delta_1)$$

$$+4\pi^3 \sum_{k=2}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \delta_k^2 + \lambda_k^2).$$

Si ha inoltre $\quad |||\gamma|||^2 = \pi(2\alpha_0^2 + 2\delta_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \delta_k^2 + \lambda_k^2))$.

Determiniamo dapprima Λ. Ricordando le (5.10), si ha: $\Lambda_0^2 = 16\pi^2$, $\Lambda_1^2 = 6\pi^2$. Vogliamo calcolare i numeri

$$\Lambda_k^2 = \frac{4\pi^2}{k^2-1} \sup_{(x,y)\in R^2 - \{(0,0)\}} [(2k-1)x^2 + (2k-1)y^2$$
$$+2(k^2+k-4)(k+1)^{-1}xy](x^2+y^2)^{-1} \qquad k \geqslant 2.$$

$\dfrac{(k^2-1)}{4\pi^2}\Lambda_k^2$ è la più grande radice dell'equazione

$$\begin{vmatrix} 2k-1-\lambda & (k^2+k-4)(k+1)^{-1} \\ (k^2+k-4)(k+1)^{-1} & 2k-1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Si ha dunque $$\Lambda_k^2 = 4\pi^2\frac{3k+5}{(k+1)^2}.$$

Si verifica facilmente che $\Lambda_k \leqslant \Lambda_0$ per ogni $k \geqslant 0$; da ciò si ottiene che $\Lambda = \Lambda_0 = 4\pi$. Determiniamo ora $\tilde{\lambda}$. Ricordando le (5.10) si ottiene $\tilde{\lambda}_0^2 = 16\pi^2$,

$\widetilde{\lambda}_1^2 = 4\pi^2$, $\widetilde{\lambda}_k^2 = 4\pi^2$ e quindi $\widetilde{\lambda}^2 = 4\pi^2$. Da ciò segue che $\Lambda\widetilde{\lambda}^{-1} = 2$ laddove il valore esatto di H è $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Bibliografia

[1] J. H. Bramble and L. E. Payne, *Pointwise bounds in the first biharmonic boundary value problem*, J. Math. Phys. 42 (1963), 278-286.

[2] A. Cialdea, *Teoremi di completezza connessi con equazioni ellittiche di ordine superiore in due variabili in un campo con contorno angoloso*, Rend. Circ. Mat. Palermo 34 (1985), 32-49.

[3] A. Cialdea, *Maggiorazione L^2 esplicita per le soluzioni del sistema dell'elasticità*, Rend. Mat. 8 (1988), 1-23.

[4] A. Cialdea, *A multiple layer potential theory alternative to Agmon's*, Arch. Rational. Mech. Anal. **120** (1992), 345-362.

[5] J. B. Diaz and H. J. Greenberg, *Upper and lower bounds for the solutions of the first biharmonic boundary value problem*, J. Math. Phys. **27** (1948), 193-201.

[6] G. Fichera, *On some general integration methods employed in connection with linear differential equations*, J. Math. Phys. **29** (1950), 59-68.

[7] G. Fichera, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, Ist. Mat. Univ. Trieste 1954.

[8] G. Fichera, *Un'introduzione alla teoria delle equazioni singolari*, Rend. Mat. Appl. **17** (1958), 83-191.

[9] G. Fichera, *Linear elliptic equations of higher order in two independent variables and singular integral equations, with applications to anisotropic inhomogeneous elasticity*, Internat. Conf. on partial differential equations and continuum mechanis, Langer (1960), 55-80.

[10] G. Fichera, *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, Lecture Notes 8, Springer, Berlin 1965.

[11] G. Fichera, *Generalized biharmonic problem and related eigenvalue problems*, Blanch Anniversary Volume, Aerospace Research Laboratories, Office of Aerospace Research, United States Air Force, 1967, 37-44.

[12] G. Fichera, *The Neumann eigenvalue problem*, Applicable Anal. 3 (1973), 213-240.

[13] G. Fichera, *Abstract and Numerical Aspects of Eigenvalue Theory*, University of Alberta, Edmonton, Canada 1973.

[14] G. Fichera, *Numerical and Quantitative Analysis*, Surveys and Reference Works in Mathem. 3, Pitman, London 1978.

[15] G. Fichera, *Teoremi di media e formule di maggiorazione relative alle funzioni biarmoniche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **59** (1978), 285-294.

[16] G. FICHERA, *Teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse*, Corso di Analisi Superiore, Ist. Mat., Roma 1982-83.

[17] A. J. GREENBERG, *The determination of upper and lower bounds for the solution of the Dirichlet problem*, J. Math. Phys. 27 (1948), 161-182.

[18] C. G. MAPLE, *The Dirichlet problem-bounds at a point for the solution and its derivatives*, Quart. Appl. Math. 8 (1950), 213-228.

[19] C. MIRANDA, *Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili*, Giorn. Mat. Battaglini 78 (1948-49), 97-118.

[20] N. I. MUSKHELISHVILI, *Singular Integral Equation*, Noordhoff, Groningen, Holland 1952.

[21] M. NICOLESCO, *Recherches sur les fonctions polyharmoniques*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **52** (1935), 183-219.

[22] L. E. PAYNE and H. F. WEINBERGER, *New bounds in harmonic and biharmonic problems*, J. Math. Phys. 33 (1955), 291-307.

[23] M. G. SLOBODYANSKII, *Estimates of the error of an approximate solution in linear problems reducing to variational ones, and their application to the determination of two sided approximations in static problems in elasticity*, Akad. Nauk. SSSR Prinkl. Math. Mech. **16** (1952), 449-464.

[24] M. G. SLOBODYANSKII, *Estimate of the error of the quantity sought for in the solution of linear problems by a variational method*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **86** (1952), 243-246.

[25] J. L. SYNGE, *Upper and lower bounds for the solutions of problems in elasticity*, Proc. Roy. Irish Acad. **53** (1950), 41-64.

[26] J. K. SYNGE, *Pointwise bounds for the solutions of certain boundary-value problems*, Proc. Roy. Soc. A **208** (1951), 170-175.

[27] E. TREFFTZ, *Konvergenz und Fehlerschätzung beim Ritzschen Verfahren*, Math. Ann. **100** (1928), 502-521.

[28] K. WASHIZU, *Bounds for solutions of boundary value problems in elasticity*, J. Math. and Phys. **32** (1953), 117-128.

[29] C. WEBER, *Eingrenzung von Verschiebungen mit Hilfe der Minamilsätze*, Z. Angew. Math. Mech. **22** (1942), 126-130.

Summary

An estimate in the L^2-norm for the second derivative of biharmonic functions in a domain Ω is considered. If $\partial\Omega$ is a circumference, the best constant is computed; if Ω is a general domain, a method for determining an explicit estimate is given.

* * *