Riv. Mat. Univ. Parma (5) **1** (1992), 229-238

A. DUMA e S. RIZZO (*)

Alcuni problemi di probabilità geometriche per famiglie di ipersfere dello spazio euclideo $\boldsymbol{R}^m$ (**)

Introduzione

In molti problemi di probabilità geometriche viene determinata la probabilità che una figura aleatoria, ad esempio un segmento o un disco, intersechi un reticolo di $\boldsymbol{R}^m$ la cui cellula fondamentale è un poligono convesso. Nel presente lavoro invece, prendendo spunto da alcuni fenomeni fisici, si è considerata una famiglia di ipersfere concentriche di centro O e un disco di posizione aleatoria e di raggio costante. Supponendo che il centro Ω del disco sia un vettore aleatorio distribuito nel piano secondo una funzione di densità dipendente soltanto dalla distanza di Ω da O, ci si propone di trovare la probabilità d'intersezione del disco con la famiglia di ipersfere. Si dimostreranno alcuni teoremi generali e se ne vedranno le applicazioni in diversi esempi.

1 - Il caso piano

Fissato nel piano un riferimento ortonormale Oxy, si consideri la famiglia di circonferenze

$$\mathcal{C}_{n,2} = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = n^2\}, \qquad n \in \boldsymbol{N}$$

(*) FB Mathematik und Informatik der Fernuniversität, GHS, Postfach 940, 5800 Hagen, Deutschland. Dip. di Matematica, Univ. di Lecce, Via Arnesano, 73100 Lecce, Italia.

(**) Ricevuto il 6.7.1992. Classificazione AMS 60 D 05. Lavoro effettuato con contributo MURST 40%, 60%.

($\mathscr{C}_{0,2} = \{O\}$) e sia $\Delta_{r,2}$ un disco aleatorio di raggio r (con $2r < 1$) il cui centro $\Omega(x, y)$ sia un vettore aleatorio bidimensionale distribuito nel piano secondo una funzione di densità $f(x, y)$ che sia una funzione continua dipendente soltanto dalla distanza ρ di Ω da O, cioè

$$f(x, y) = f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) = g(\rho) \geqslant 0 .$$

Si ha dunque:

$$1 = \int\int_{R^2} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} \rho g(\rho)\, \mathrm{d}\rho\right) \mathrm{d}\vartheta = 2\pi \int_0^{\infty} \rho g(\rho)\, \mathrm{d}\rho .$$

Sia ora G una *primitiva* della funzione

$$\rho \mapsto \rho g(\rho) . \tag{1}$$

Ne segue

$$\forall a, b \in \boldsymbol{R} \qquad \int_a^b \rho g(\rho)\, \mathrm{d}\rho = G(b) - G(a) , \tag{2}$$

$$\lim_{b \to +\infty} G(b) - G(0) = \frac{1}{2\pi} . \tag{3}$$

Si consideri l'evento

A: il disco $\Delta_{r,2}$ interseca uno dei cerchi $\mathscr{C}_{n,2}$.

Si ottiene

Teorema 1. *La probabilità dell'evento A è*

$$p(A) = 1 + 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (G(n + r) - G(n + 1 - r)) .$$

Dimostrazione. Se $0 \leqslant a < b$ sono due numeri reali, si indicherà con $S_{a,b}$ la corona circolare

$$S_{a,b} = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2\} .$$

Si osservi ora che, fissato $n \in \boldsymbol{N}$, il centro Ω di $\Delta_{r,2}$ appartiene alla corona circolare $S_{n,n+1}$ e $\Delta_{r,2}$ interseca la famiglia di circonferenze $\mathscr{C} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{C}_{n,2}$ se e solo se Ω appartiene a $S_{n,n+r} \cup S_{n+1-r,n+1}$.

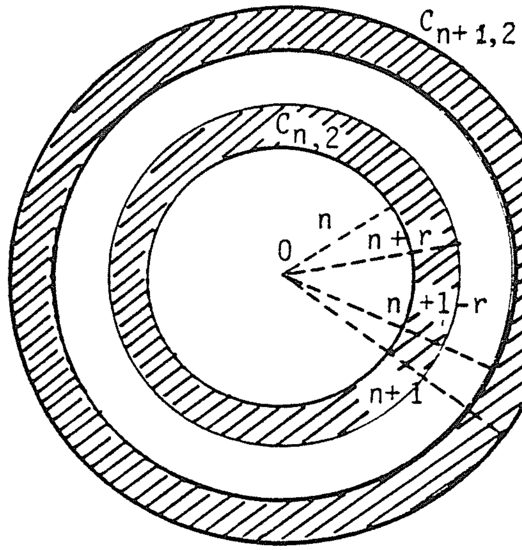


Fig. 1.

Considerato allora l'evento

$$A_n = \textit{il centro di } \Delta_{r,2} \textit{ appartiene a } S_{n,\,n+r} \cup S_{n+1-r,\,n+1}, \quad n \in N,$$

si ha (tenendo anche conto di (1) e (2))

$$p(A_n) = \int_0^{2\pi} \int_n^{n+r} \rho g(\rho)\, d\rho\, d\vartheta + \int_0^{2\pi} \int_{n+1-r}^{n+1} \rho g(\rho)\, d\rho\, d\vartheta \tag{4}$$

$$= 2\pi(G(n+r) - G(n) + G(n+1) - G(n+1-r)).$$

$$p(A) = \sum_{n=0}^{\infty} p(A_n). \tag{5}$$

Ne segue

$$p(A) = 2\pi(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (G(n+r) - G(n+1-r)) + \lim_{k\to\infty} G(k+1) - G(0))$$

$$= 2\pi(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (G(n+r) - G(n+1-r)) + \frac{1}{2\pi})$$

$$= 1 + 2\pi \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (G(n+r) - G(n+1-r)).$$

Esempio 1. Sia $g(\rho) = \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda\rho^2}$ (con $\lambda > 0$); risulta allora

$$G(\rho) = -\frac{1}{2\pi} e^{-\lambda\rho^2}.$$

Quindi, considerando la serie convergente $H_{\lambda,2}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(n+r)^2}$, si ottiene

$$p(A) = 1 - 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (G(n+1-r) - G(n+r)) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\lambda(n+r)^2} - e^{-\lambda(n+1-r)^2})$$

$$= 1 - H_{\lambda,2}(r) + H_{\lambda,2}(1-r).$$

Esempio 2. Sia $g(\rho) = \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{1+\rho^4}$; risulta allora

$$G(\rho) = \frac{1}{\pi^2} \operatorname{arc\,tg} \rho^2.$$

Quindi si ottiene

$$p(A) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{arc\,tg}(n+1-r)^2 - \operatorname{arc\,tg}(n+r)^2)$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{(1-2r)(2n+1)}{1+(n+r)^2(n+1-r)^2}.$$

Esempio 3. Sia $g(\rho) = \frac{(\alpha-1)}{\pi} \frac{1}{(1+\rho^2)^\alpha}$ (con $\alpha > 2$); risulta allora

$$G(\rho) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{(1+\rho^2)^{\alpha-1}}.$$

Quindi, introdotta la serie convergente $F_{\alpha,2}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+(n+r)^2)^\alpha}$, si ottiene

$$p(A) = 1 - F_{\alpha-1,2}(r) + F_{\alpha-1,2}(1-r).$$

2 - Un altro caso piano

Fissato nel piano un riferimento ortonormale Oxy, si consideri ora un disco fisso di centro O e raggio R (*il nucleo*), una famiglia di circonferenze $\mathcal{C}_{n+R,2}$ ($n \in N^*$) di centro O e raggio $R+n$ (*le orbite*) e un disco aleatorio $\Delta_{r,2}$ di raggio r (con $2r < 1$) il cui centro $\Omega(x, y)$ sia un vettore aleatorio bidimensionale distribuito all'esterno del cerchio di centro O e raggio $R + r$ secondo una funzione di densità $f(x, y)$ come in 1.

In questo caso, posto $S_{R+r,\infty} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \geqslant (R + r)^2\}$, si ha

$$1 = \int\int_{S_{R+r,\infty}} f(x, y)\,dx\,dy = 2\pi \int_{R+r}^{\infty} \rho g(\rho)\,d\rho.$$

Sia poi G primitiva della funzione $\rho \to \rho g(\rho)$, definita su $[R + r, +\infty[$.

Considerato l'evento

B: il disco $\Delta_{r,2}$ *interseca uno dei cerchi* $\mathscr{C}_{n+R,2}$,

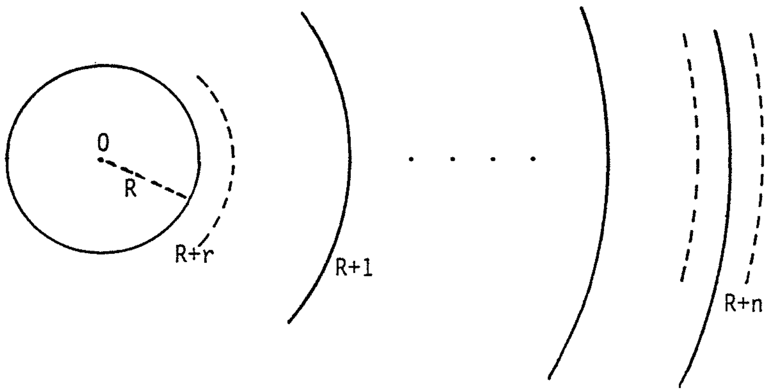
si ottiene

Teorema 2. *La probabilità dell'evento B è*

$$p(B) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (G(R + r + n) - G(R - r + n)).$$

Dimostrazione. Basta utilizzare la seguente figura e seguire il procedimento del Teorema 1.

Fig. 2.



Esempio 4. Sia $g(\rho) = \dfrac{(\alpha - 2)(R + r)^{\alpha-2}}{2\pi} \dfrac{1}{\rho^{\alpha}}$ con $\alpha > 3$, allora

$$G(\rho) = -\frac{(R + r)^{\alpha-2}}{2\pi} \frac{1}{\rho^{\alpha-2}}.$$

Ne segue

$$p(B) = (R+r)^{\alpha-2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(R-r+n)^{\alpha-2}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(R+r+n)^{\alpha-2}}\Big)$$

$$= (R+r)^{\alpha-2}\Big(\zeta(\alpha-2, R-r) - \frac{1}{(R-r)^{\alpha-2}} - \zeta(\alpha-2, R+r) + \frac{1}{(R+r)^{\alpha-2}}\Big)$$

dove, come al solito, si è indicata con $\zeta(z, q)$ la *funzione di Riemann*

$$\zeta(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(q+n)^z}.$$

Esempio 5. Siano $a, b \in \boldsymbol{R}^+$ e sia

$$g(\rho) = \frac{ab}{2\pi}e^{a(R+r)^b}\rho^{b-2}e^{-a\rho^b}.$$

Allora
$$G(\rho) = -\frac{1}{2\pi}e^{a(R+r)^b}e^{-a\rho^b}.$$

Ne segue

$$p(B) = e^{a(R+r)^b}\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-a(R-r+n)^b} - e^{-a(R+r+n)^b})$$

$$= e^{a(R+r)^b}(H_{a,b}(R-r) - H_{a,b}(R+r) + e^{-a(R+r)^b} - e^{-a(R-r)^b}),$$

dove $H_{a,b}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a(n+\rho)^b}$.

3 - Extensione ad $\boldsymbol{R}^m$

Si estenderanno ora allo spazio euclideo $\boldsymbol{R}^m$, con $m \geqslant 2$, i risultati dei numeri 1 e 2.

Indicato con R un numero reale positivo, si considerino le due famiglie di ipersfere

$$\mathscr{C}_{n,m} = \{(x_1. \dots, x_m) \in \boldsymbol{R}^m \mid \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = n^2\}, \qquad n \in \boldsymbol{N}$$

$$\mathscr{C}_{n+R,m} = \{(x_1. \dots, x_m) \in \boldsymbol{R}^m \mid \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = (n+R)^2\}, \qquad n \in \boldsymbol{N}^*.$$

Sia $\Delta_{r,m}$ una ipersfera aleatoria di raggio r (con $2r < 1$) il cui centro $\Omega(x_1, \ldots, x_m)$ sia un vettore aleatorio m-dimensionale distribuito in $\boldsymbol{R}^m$ secondo una funzione di densità $f(x_1, \ldots, x_m)$ che sia una funzione continua dipendente soltanto dalla distanza ρ di Ω da O.

Utilizzando coordinate polari, si ha

$$f(\rho \cos \varphi_1, \rho \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \ldots, \rho \sin \varphi_1 \ldots \sin \varphi_{m-1}) = g(\rho) \geqslant 0 . \tag{6}$$

Poiché il volume della sfera S^{m-1} è

$$\frac{2(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma(\frac{m}{2})} \tag{7}$$

dalla

$$1 = \int_{\boldsymbol{R}^m} f(x_1, \ldots, x_m)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m = \int_{S^{m-1}} \mathrm{d}\sigma \int_0^\infty \rho^{m-1} g(\rho)\, \mathrm{d}\rho \tag{8}$$

segue la *relazione*

$$\int_0^\infty \rho^{m-1} g(\rho)\, \mathrm{d}\rho = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{2(\sqrt{\pi})^m} . \tag{9}$$

Sia infine G una primitiva della funzione $\rho \to \rho^{m-1} g(\rho)$. Considerati gli eventi

A: l'ipersfera $\Delta_{r,m}$ *interseca una delle ipersfere* $\mathcal{C}_{n,m}$, $n \in \boldsymbol{N}$

B: l'ipersfera $\Delta_{r,m}$ *interseca una delle ipersfere* $\mathcal{C}_{n+R,m}$, $n \in \boldsymbol{N}^*$,

in modo analogo ai Teoremi 1 e 2 si ottiene

Teorema 1'. *La probabilità dell'evento A è*

$$p(A) = 1 + \frac{2(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma(\frac{m}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} (G(n+r) - G(n+1-r)) .$$

Teorema 2'. *La probabilità dell'evento B è*

$$p(B) = \frac{2(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma(\frac{m}{2})} \sum_{n=1}^{\infty} (G(R+r+n) - G(R-r+n)) .$$

Gli esempi visti nei numeri **1** e **2** si possono estendere ad $\boldsymbol{R}^m$.

Esempio 1'. Sia $g(\rho) = \dfrac{m\lambda\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2(\sqrt{\pi})^m} e^{-\lambda\rho^m}$ con $\lambda > 0$.

Allora
$$G(\rho) = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2(\sqrt{\pi})^m} e^{-\lambda\rho^m}.$$

Ne segue che:

$$p(A) = 1 - H_{\lambda,m}(r) + H_{\lambda,m}(1-r) \quad \text{dove} \quad H_{\lambda,m}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(n+r)^m}.$$

Esempio 2'. Sia $g(\rho) = \dfrac{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{(\sqrt{\pi})^{m+2}} \dfrac{1}{1+\rho^{2m}}$.

Allora
$$G(\rho) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{(\sqrt{\pi})^{m+2}} \operatorname{arc\,tg} \rho^m.$$

Ne segue

$$p(A) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{arc\,tg}(n+1-r)^m - \operatorname{arc\,tg}(n+r)^m).$$

Esempio 3'. Sia $g(\rho) = \dfrac{m(\alpha-1)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2(\sqrt{\pi})^m} \dfrac{1}{(1+\rho^m)^\alpha}$ con $\alpha > 2$.

Allora
$$G(\rho) = -\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2(\sqrt{\pi})^m} \frac{1}{(1+\rho^m)^{\alpha-1}}.$$

Ne segue

$$p(A) = 1 - F_{\alpha-1,m}(r) + F_{\alpha-1,m}(1-r),$$

dove
$$F_{\alpha,m}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+(n+r)^m)^\alpha}.$$

Esempio 4′. Sia $g(\rho) = \dfrac{(\alpha - m)\Gamma(\frac{m}{2})}{2(\sqrt{\pi})^m} \dfrac{(R+r)^{\alpha - m}}{\rho^\alpha}$ con $\alpha > m + 1$.

Allora
$$G(\rho) = -\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{2(\sqrt{\pi})^m}\frac{(R+r)^{\alpha - m}}{\rho^{\alpha - m}}.$$

Ne segue
$$p(B) = (R+r)^{\alpha - m}\left[\xi(\alpha - m, R - r) - \frac{1}{(R-r)^{\alpha - m}} - \zeta(\alpha - m, R + r) + \frac{1}{(R+r)^{\alpha - m}}\right].$$

Esempio 5′. Siano $a, b \in \boldsymbol{R}^+$ e sia
$$g(\rho) = \frac{ab\Gamma(\frac{m}{2})}{2(\sqrt{\pi})^m} e^{a(R+r)^b} \rho^{b-m} e^{-a\rho^b}.$$

Allora
$$G(\rho) = -\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{2(\sqrt{\pi})^m} e^{a(R+r)^b} e^{-a\rho^b}.$$

Segue
$$p(B) = e^{a(R+r)^b}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-a(R-r+n)^b} - e^{-a(R+r+n)^b}\right)$$
$$= e^{a(R+r)^b}\left(H_{a,b}(R-r) - H_{a,b}(R+r) + e^{-a(R+r)^b} - e^{-a(R-r)^b}\right),$$

dove $H_{a,b}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a(n+\rho)^b}$.

Bibliografia

[1] V. Conserva et S. Rizzo, *Quelques extensions anisotropiques du problème de Buffon-Laplace*, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris **33** (1988), 91-105.

[2] V. Conserva and S. Rizzo, *Some problems of Geometric Probability for Archimedean Tilings of the Euclidean Plane*, Sem. Fach. Math. Inf., Univ. Hagen **39** (1990), 30-44.

[3] A. Duma et M. Stoka, *Sur quelques problèmes de probabilités géométriques pour des réseaux irréguliers dans l'espace euclidien E_2 et E_n*, Rend. Circ. Mat. Palermo **40** (1991), 105-121.

[4] L. A. SANTALÓ, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley, Amsterdam 1976.

[5] M. STOKA, *Sur quelques problèmes de probabilités géométriques pour des réseaux dans l'espace euclidien* E_n, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris 34 (1989), 31-50.

Summary

Given a family of spheres with the same center and the radii in arithmetic progression, we evaluate the probability of the intersection with a sphere of constant radius, whose center is distributed in a non uniform way in $\boldsymbol{R}^m$.

* * *