Riv. Mat. Univ. Parma (5) **2** (1993), 23-27

GIOVANNA REMORINI (*)

# Sulla formula barometrica nei plasmi (**)

*A Bianca Manfredi con amicizia e stima*

## 1 - Introduzione

La formula barometrica, che dà l'andamento della pressione (e della densità) in funzione della quota, è notissima nella statica dei gas perfetti pesanti isotermi.

Non pari attenzione è stata data alla formula barometrica nel caso di plasmi descritti nel modello magnetofluidodinamico (plasmi MFD) pesanti in equilibrio, malgrado tale problema sia di palese interesse nell'astrofisica; per quanto è a conoscenza dell'autrice solo N. G. Van Kampen e B. U. Felderhof in [2] e G. Mattei in [1] se ne sono interessati, trattando il caso di un plasma MFD pesante isotermo.

Scopo della presente nota è di fornire alcune considerazioni di carattere generale sulla formula barometrica per un plasma MFD pesante sia nell'ipotesi di barotropicità, che nell'ipotesi di non barotropicità (n. 2).

Inoltre nel caso isotermo si arricchisce la esemplificazione di campi magnetici $\boldsymbol{B}$ generatori di forze magnetiche che assicurano l'equilibrio per un plasma MFD pesante isotermo, sia nel caso che la forza magnetica sia conservativa (cfr. [1]) che non conservativa e si danno in modo esplicito le corrispondenti formule barometriche (n. 3).

(*) Dip. di Ingegneria Aerospaziale, Univ. Pisa, Via Diotisalvi 2, 56126 Pisa, Italia.

(**) Ricevuto il 29.3.1993. Classificazione AMS 82 D 10.

## 2 - Equazioni di base e considerazioni di carattere generale

Indicati con $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ i versori di una terna cartesiana di riferimento (con $\boldsymbol{e}_z$ versore della verticale ascendente), $\rho$ la densità, $g=$ cost. l'accelerazione di gravità, $p$ la pressione, $\mu$ la permeabilità magnetica (costante), $\boldsymbol{B}$ il vettore induzione magnetica, $\boldsymbol{f}_m = \dfrac{1}{4\pi\mu}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{B}$ la forza magnetica per unità di volume (usando il sistema di unità di misura di Gauss), le *equazioni di base della magnetofluidostatica* per un plasma MFD pesante sono

$$-\rho g\boldsymbol{e}_z - \mathrm{grad}\,p + \boldsymbol{f}_m = 0 \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0\,. \tag{2.1}$$

Si riconosce facilmente, risultando

$$\mathrm{rot}\,(-\rho g\boldsymbol{e}_z - \mathrm{grad}\,p) = -g\,\frac{\partial\rho}{\partial y}\,\boldsymbol{e}_x + g\,\frac{\partial\rho}{\partial x}\,\boldsymbol{e}_y$$

che per un plasma MFD pesante all'equilibrio:

a - se $\boldsymbol{f}_m$ è conservativa la densità deve essere funzione solo della quota, cioè $\rho=\rho(z)$, e viceversa.

b - se $\boldsymbol{f}_m$ non è conservativa deve essere

$$\boldsymbol{e}_z\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}_m = 0 \qquad \boldsymbol{f}_m\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}_m = -g\,\frac{D(\rho,\,p)}{D(x,\,y)}\,.$$

In particolare, per un plasma MFD pesante barotropico

$$p = f(\rho) \tag{2.2}$$

all'equilibrio:

a - se $\boldsymbol{f}_m$ è conservativa deve essere $p=p(z)$ (e quindi $\boldsymbol{f}_m = f_m(z)\,\boldsymbol{e}_z$) e viceversa.

b - se $\boldsymbol{f}_m$ non è conservativa deve essere $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}_m\cdot\boldsymbol{e}_z = 0$ ed $\boldsymbol{f}_m\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}_m = 0$, pertanto la forza magnetica deve essere *complesso-lamellare* e quindi si può scrivere nella forma $\boldsymbol{f}_m = \lambda(x,\,y,\,z)\,\mathrm{grad}\,X(x,\,y,\,z)$ (con $\mathrm{grad}\,\lambda\wedge\mathrm{grad}\,X\cdot\boldsymbol{e}_z = 0$).

Per un plasma MFD pesante non barotropico all'equilibrio, se $\boldsymbol{f}_m$ è conservativa risulta $\boldsymbol{f}_m = \rho(z)\,g\boldsymbol{e}_z + \mathrm{grad}\,p(x,\,y,\,z)$, con $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial p}{\partial y}$ non contemporaneamente nulli. Se $\boldsymbol{f}_m$ non è conservativa, risultando $\dfrac{D(\rho,\,p)}{D(x,\,y)} \neq 0$, la forza magnetica non è complesso-lamellare ed è del tipo

$$\boldsymbol{f}_m = \rho(x, y, z)\, g\boldsymbol{e}_z + \operatorname{grad} p(x, y, z)$$

con $\dfrac{\partial \rho}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial \rho}{\partial y}$ non contemporaneamente nulli.

### 3 - Plasmi isotermi

Per un plasma MFD pesante isotermo

$$\rho = kp \qquad k = \text{cost.} \tag{3.1}$$

l'equilibrio è assicurato da forza magnetica conservativa, se e solo se $\boldsymbol{f}_m = f_m(z)\boldsymbol{e}_z$.

Campi magnetici generatori di forza magnetica del tipo $f_m(z)\boldsymbol{e}_z$ sono

$$\boldsymbol{B}(z) = B_x(z)\boldsymbol{e}_x + B_y(z)\boldsymbol{e}_y \tag{3.2}$$

con $B_x(z)$ e $B_y(z)$ funzioni qualsiasi di $z$; la forza magnetica risulta essere

$$\boldsymbol{f}_m(z) = -\frac{1}{8\pi\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} B^2(z)\boldsymbol{e}_z$$

con $B^2(z) = B_x^2(z) + B_y^2(z)$.

L'*equazione di equilibrio*, proiettata sull'asse $\boldsymbol{e}_z$, si scrive

$$\rho(z)g + \frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}\rho(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{8\pi\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} B^2(z) \tag{3.3}$$

che ammette come soluzione

$$\rho = \tilde{\rho} + H(z)\, e^{-kgz} \tag{3.4}$$

essendo $\tilde{\rho} = \rho_0 e^{-kgz}$ la densità che si avrebbe per un gas ordinario isotermo ed

$$H(z) = -\frac{k}{8\pi\mu}\int e^{kgz}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} B^2(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Per esempio, se $\boldsymbol{B} = aze_x + bz^2 \boldsymbol{e}_y$, all'equilibrio si ha

$$
(3.5) \qquad \begin{aligned}
\rho - \tilde{\rho} = &- \frac{1}{4\pi\mu k^3 g^4} (2b^2 k^3 g^3 z^3 - 6b^2 k^2 g^2 z^2) \\
&- \frac{1}{4\pi\mu k^3 g^4} (a^2 k^2 g^2 + 12b^2)(kgz - 1 + e^{-kgz}).
\end{aligned}
$$

Si osservi che per $b = 0$ la (3.5) ridà la (2.10) di [1].

Si riconosce facilmente che, in assenza di campo magnetico $\rho = \tilde{\rho}$; per piccoli valori di $z$ si ha $\rho \approx \rho_0 (1 - kgz)$ approssimazione di $\tilde{\rho}$.

Se $\rho_0 = (a^2 k^2 g^2 + 12b^2)(4\pi\mu k^3 g^4)^{-1}$, $\rho(z)$ è una parabola cubica, è sempre decrescente e si annulla per $z = z_0 > 0$.

Se $\rho_0 > (a^2 k^2 g^2 + 12b^2)(4\pi\mu k^3 g^4)^{-1}$, $\rho(z)$ è tale che $\lim_{z \to \mp\infty} \rho(z) = \pm\infty$, è sempre decrescente e si annulla per $z = \bar{z}$ (con $\bar{z} > z_0$).

Se $\rho_0 < (a^2 k^2 g^2 + 12b^2)(4\pi\mu k^3 g^4)^{-1}$, $\rho(z)$ è tale che $\lim_{z \to \pm\infty} \rho(z) = -\infty$, si annulla per $z = z_1 < 0$ e $z = z_2 > 0$ (con $z_2 < z_0$), ha un massimo relativo per $z = z^* < 0$.

Da un punto di vista fisico, dovendo essere ovviamente $\rho > 0$ e $z \geqslant 0$, gli ultimi due casi non differiscono qualitativamente, avendosi in entrambi un decremento di tipo esponenziale di $\rho$ a partire da $\rho_0$.

Per un plasma MFD isotermo si ha equilibrio per forza magnetica non conservativa solo se $\boldsymbol{f}_m(x, y, z)$ è complesso-lamellare e tale che $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}_m \cdot \boldsymbol{e}_z = 0$.

Scritto $\boldsymbol{f}_m = \lambda(x, y, z) \operatorname{grad} X(x, y, z)$, risultando

$$
\operatorname{rot} \boldsymbol{f}_m = \frac{D(\lambda, X)}{D(y, z)} \boldsymbol{e}_x + \frac{D(\lambda, X)}{D(z, x)} \boldsymbol{e}_y + \frac{D(\lambda, X)}{D(x, y)} \boldsymbol{e}_z
$$

si riconosce che $\lambda$ e $X$ devono essere tali che

$$
(3.6) \qquad \begin{gathered}
\frac{D(\lambda, X)}{D(x, y)} = 0 \\
(k\lambda + \frac{1}{g} \frac{\partial \lambda}{\partial z}) \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial z} = 0 \\
(k + \frac{1}{g} \frac{\partial \lambda}{\partial z}) \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{1}{g} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial X}{\partial z} = 0
\end{gathered}
$$

con $\dfrac{\partial X}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial X}{\partial y}$ non contemporaneamente nulli.

Si osservi che non tutti i campi magnetici generatori di forza magnetica complesso-lamellare assicurano l'equilibrio del plasma MFD pesante isotermo, come per esempio $\boldsymbol{B} = e^{\alpha z}(ay\boldsymbol{e}_x + b\boldsymbol{e}_y)$, oppure $\boldsymbol{B} = Az(y\boldsymbol{e}_x - x\boldsymbol{e}_y)$ che generano forza magnetica $\boldsymbol{f}_m$ complesso-lamellare, ma non verificante la (3.6).

Per esempio, se $\boldsymbol{B} = Ce^{\alpha z}x[\operatorname{sen}\alpha y\boldsymbol{j} - \cos\alpha y\boldsymbol{k}]$ con $\alpha = -\frac{1}{2}gk$, risulta

$$\boldsymbol{f}_m = \frac{-C^2}{4\pi\mu}e^{-kgz}x\boldsymbol{e}_x$$

e conseguentemente

$$\rho(x, z) = \left(\rho_0 - \frac{C^2 k}{8\pi\mu}x^2\right)e^{-kgz} \tag{3.7}$$

da considerarsi nel dominio $x^2 < 8\pi\mu\rho_0(C^2 k)^{-1}$.

## Bibliografia

[1] G. Mattei, *Sulla formula barometrica nei plasmi*, Riv. Mat. Univ. Parma **15*** (1989), 91-96.

[2] N. G. Van Kampen and B. V. Felderhof, *Theoretical methods in plasma physics*, North-Holland, Amsterdam 1967.

## Summary

*Some general considerations on the barometric formula for a heavy* MFD *plasma, both under the barotropic condition and not, are made. For the isotherm case some examples are given in which the magnetic field insure the equilibrium of an isotherm heavy* MFD *plasma, both for conservative and non conservative magnetic forces, and the corresponding barometric formulae are explicity given.*

* * *