Riv. Mat. Univ. Parma (5) 2 (1993), 45-48

ALDO ASCARI (*)

Una costruzione «manuale» di matrici idempotenti di ordine 3 (**)

A Bianca Manfredi con amicizia e stima

Ricordiamo anzitutto che è *idempotente* ogni matrice diagonale D (di ordine n) con alcuni elementi eguali a 1, e gli altri nulli; e che lo è egualmente ogni matrice A simile a D, cioè

$$A = BDB^{-1} \tag{1}$$

dove B è una qualsiasi matrice quadrata non singolare. In particolare, se D è nulla, oppure è identica, tale è anche, rispettivamente, A.

Trascurando come banali i due casi ora accennati, la (1) può essere usata per la costruzione di matrici idempotenti, avendo a disposizione, oltre che l'arbitrarietà di B, quella della distribuzione, sulla diagonale di D, di r elementi eguali ad 1. Il numero r è il rango, e quindi la traccia, di D, ed è pertanto anche il rango e la traccia di A; nei casi non banali, quindi, $1 \leq r \leq n-1$.

Nelle applicazioni è di speciale interesse il *caso* $n = 3$, in cui l'idempotenza di A si traduce in importanti e note proprietà della trasformazione (dell'ordinario spazio cartesiano in sé) rappresentata dalla matrice. Può quindi riuscire di qualche utilità un semplice schema per la costruzione di A, in cui l'arbitrarietà disponibile sia messa a profitto direttamente sugli elementi di A, anziché su quelli di B e D nella (1). Ciò consente di evitare le operazioni matriciali della (1), e in particolare la costruzione di B^{-1}; operazioni che, per quanto semplici, possono riuscire un poco più laboriose in una situazione di calcolo *manuale*.

Lo schema proposto può essere ottenuto servendosi in modo *ingenuo* della

(*) Via dei Ciclamini 43, 20147 Milano, Italia.
(**) Ricevuto il 23.4.1993. Classificazione AMS 65 F 99.

definizione di matrice idempotente. Sia questa

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & p & q \\ t & \beta & u \\ x & y & \gamma \end{pmatrix}.$$

L'equazione $A^2 = A$ si traduce in nove equazioni, che scriviamo separando quelle relative agli elementi della diagonale di A dalle altre

$$\begin{gathered} \alpha^2 + pt + qx = \alpha \\ pt + \beta^2 + uy = \beta \qquad qx + uy + \gamma^2 = \gamma \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \alpha p + p\beta + qy &= p & \qquad \alpha q + pu + q\gamma &= q \\ \alpha t + t\beta + ux &= t & \qquad qt + \beta u + u\gamma &= u \\ \alpha x + ty + x\gamma &= x & \qquad px + \beta y + y\gamma &= y\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Posto

$$\lambda = 1 - \alpha - \beta \qquad \mu = 1 - \alpha - \gamma \qquad \rho = 1 - \beta - \gamma \tag{4}$$

le (3) si riscrivono, nell'ordine,

$$\begin{aligned} \lambda p &= qy & \qquad \mu q &= pu & \qquad \lambda t &= ux \\ \rho u &= qt & \qquad \mu x &= ty & \qquad \rho y &= px\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Detta ora τ la *traccia* di A $\quad \tau = \alpha + \beta + \gamma$

dalle (4) si ha $\qquad \lambda + \mu + \rho = 3 - 2\tau$

e poiché (avendo escluso che A sia nulla, oppure identica) τ può assumere solo i valori 1 e 2, ne segue che $\lambda + \mu + \rho$ può assumere solo i valori ± 1; quindi *almeno una* delle tre quantità λ, μ, ρ è necessariamente diversa da zero. Rinunziamo qui in parte all'arbitrarietà consentita da questa condizione e imponiamo che *nessuna* di queste quantità sia nulla; la scelta degli elementi diagonali α, β, γ di A è pertanto arbitraria salvo i due vincoli:

> *la traccia τ dev'essere eguale a* 1, *oppure a* 2; *valgono le tre disuguaglianze* $\alpha + \beta \neq 1$, $\alpha + \gamma \neq 1$, $\beta + \gamma \neq 1$.

In virtù della condizione $\lambda\mu\rho \neq 0$, le (5) mostrano che gli elementi extra-diagonali di A sono tutti nulli, oppure tutti diversi da zero. Infatti, sia ad esempio $p = 0$; ne segue: $q = 0$ per la seconda (5), $y = 0$ per la sesta; indi $u = 0$ per la quarta, $x = 0$ per la quinta, $t = 0$ per la terza. Allo stesso risultato si perviene palesemente partendo dall'ipotesi che sia nullo uno qualsiasi degli altri elementi extra-diagonali.

Ma la matrice diagonale così costruita è idempotente, come mostrano le (2), soltanto se gli elementi della diagonale sono eguali a zero, oppure ad 1; si costruirebbe cioè una matrice della forma D. Tralasciando anche questo caso come banale, scegliamo perciò gli elementi extra-diagonali di A in modo che nessuno di essi sia nullo; a ciò bastano le stesse relazioni (5), dopo aver scelto gli elementi diagonali nel modo sopra detto.

Moltiplicando membro a membro la prima con la seconda (5), la terza con la quarta, la quinta con la sesta, si ottengono (se $pq \neq 0$, $tu \neq 0$, $xy \neq 0$) le tre relazioni

$$\lambda\mu = uy \qquad \lambda\rho = qx \qquad \mu\rho = pt\,. \tag{6}$$

In *due* di queste si può scegliere *un* elemento extra-diagonale ad arbitrio; gli altri quattro restano determinati. Ad esempio, si vogliano scegliere ad arbitrio gli elementi p e q della prima riga di A; poniamo in evidenza le scelte arbitrarie mediante l'indice 0. Dalla seconda e terza (6) seguono

$$x = \lambda\rho\, q_0^{-1} \qquad t = \mu\rho\, p_0^{-1} \tag{7}$$

mentre dalle prime due (5) si ha

$$y = \lambda p_0\, q_0^{-1} \qquad u = \mu q_0\, p_0^{-1}\,. \tag{8}$$

È immediato verificare che tutte le altre relazioni (5) e (6) non utilizzate riescono soddisfatte. È poi evidente che la scelta arbitraria di p e q nella seconda e terza (6) è soltanto una di numerose alternative possibili (12 in totale).

Esempio.

$$\tau_0 = 2 \qquad \alpha_0 = 4 \qquad \beta_0 = -1$$

da cui $\quad \gamma = -1 \qquad \lambda = -2 \qquad \mu = -2 \qquad \rho = 3$

e $\quad \lambda\rho = -6 \qquad \mu\rho = -6\,.$

Quindi, scelti $\quad p_0 = 1 \qquad q_0 = 2$

risulta $\quad x = -3 \qquad t = -6 \qquad y = -1 \qquad u = -4\,.$

Dunque
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -6 & -1 & -4 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Può rimanere un dubbio circa il mancato uso delle equazioni (2). Queste, in effetti, avrebbero consentito di precisare i valori ammessi per la traccia τ ($\tau = 1$ oppure $\tau = 2$), se tali valori non fossero già indicati dalla teoria generale, secondo quanto si è rammentato all'inizio. Infatti, le (2) possono essere viste come un sistema lineare nei tre prodotti pt, qx, uy, sistema che risolto dà

$$pt = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2))$$

e analoghe espressioni per qx, uy, che non importa trascrivere. Eguagliando questa alla terza (6), e ricordando le espressioni (4) di μ e ρ, si ottiene l'equazione

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma - 3\alpha - 3\beta - 3\gamma + 2 = 0$$

cioè semplicemente $\tau^2 - 3\tau + 2 = 0$ da cui $\tau = 1$, oppure $\tau = 2$.

Osserviamo infine che lo schema proposto, mentre vincola ad essere diversi da zero gli elementi extra-diagonali di A, permette che uno o due elementi diagonali siano nulli (uno solo se $\tau = 1$); l'uso della (1), viceversa, produce generalmente matrici con elementi nulli, ma in modo a priori imprevedibile, praticamente casuale.

Summary

A simple set of formulae is offered for the construction of an idempotent matrix of order 3, with an arbitrary choice of the rank (1 or 2) and of four of its nine elements.

* * *