Riv. Mat. Univ. Parma (5) 2 (1993), 67-70

GIULIO MATTEI (*)

Brevi considerazioni sulle rotazioni rigide in magnetofluidodinamica (**)

A Bianca Manfredi con amicizia e stima

Si consideri un fluido omogeneo, incomprimibile, viscoso (stokesiano lineare), elettroconduttore dotato di conducibilità elettrica finita e con effetto Hall non trascurabile, soggetto a forze di massa di origine non elettromagnetica conservative, descritto dalle equazioni della magnetofluidodinamica (MFD).

Nell'ambito delle equazioni indefinite *non linearizzate*, in [5] sono state caratterizzate le *rotazioni uniformi rigide d'assieme* attorno ad un asse fisso di un tal fluido, determinando fra l'altro classi di campi magnetici di preciso significato fisico (ed, in corrispondenza, il campo delle pressioni) che rendono tali moti possibili.

In [6] poi si è determinata la *forma delle superfici isobariche* Σ_p (ed, in particolare, della superficie libera) per il fluido in questione nel caso in cui le forze di massa di origine non elettromagnetica si riducano al peso ed il fluido sia contenuto in un recipiente (tipicamente un cilindro a fondo orizzontale) che ruoti uniformemente attorno ad un asse z verticale. In [6] fra l'altro si è messa in evidenza la comparsa di un *valore critico* Ω_c per la grandezza Ω della velocità angolare (Ω_c risulta legato al campo magnetico ed alla densità): per $\Omega > \Omega_c$ ogni Σ_p è un paraboloide rotondo di asse z con la concavità rivolta verso l'alto (come in idrodinamica ordinaria); per $\Omega < \Omega_c$ ogni Σ_p è ancora un paraboloide rotondo di asse z, ma con la concavità rivolta verso il basso; infine per $\Omega = \Omega_c$ ogni Σ_p è un piano orizzontale.

(*) Dip. di Ingegneria Aerospaziale, Univ. Pisa, Via Diotisalvi 2, 56126 Pisa, Italia.

(**) Ricevuto il 24.5.1993. Classificazione AMS 76 W 05.

In questa breve nota si fanno alcune considerazioni a completamento di [5] e [6].

È noto che, nell'ambito dell'idrodinamica ordinaria (fluido non elettroconduttore), le rotazioni rigide d'assieme attorno ad un asse fisso del fluido in esame sono *necessariamente uniformi* (cfr. [7] n. 55, [1], [2] n. 263).

Si vuole qui osservare che in MFD:

1. le suddette rotazioni in generale non sono più uniformi
2. condizione necessaria e sufficiente affinché lo siano è che i campi magnetici che rendono possibili tali moti siano generatori di forza magnetica per unità di volume conservativa
3. per quanto concerne le rotazioni rigide non uniformi, esse sono possibili solo con campi magnetici generatori di forza magnetica per unità di volume (non conservativa) il cui rotore sia parallelo all'asse di rotazione
4. nelle rotazioni rigide MFD uniformi l'effetto Hall non gioca ruolo alcuno, al contrario di quanto accade per quelle non uniformi.

Per dimostrare le affermazioni 1-4 scriviamo le equazioni non lineari di base MFD per il fluido in questione. Esse sono notoriamente (in unità di Gauss)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{\omega} - \operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - U\right) + \frac{1}{4\pi\mu\rho}(\operatorname{rot}\boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B} + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) + \nu_m \nabla^2\boldsymbol{B} + \beta \operatorname{rot}(\boldsymbol{B} \wedge \operatorname{rot}\boldsymbol{B}) \tag{3}$$

con la condizione

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0\,. \tag{4}$$

In esse $\boldsymbol{v}$ è il campo di velocità, t il tempo, $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ il vortice, p la pressione, ρ la densità (costante), U il potenziale delle forze di massa di origine non elettromagnetica riferito alla unità di massa, μ la permeabilità magnetica (costante), $\boldsymbol{B}$ il vettore induzione magnetica, ν il coefficiente di viscosità cinematica (costante), $\nu_m = c^2(4\pi\mu\sigma)^{-1}$ il coefficiente (costante) di viscosità magnetica (c velocità della luce nel vuoto, σ conducibilità elettrica, costante), $\beta = c^2\beta_H(4\pi\mu)^{-1}$ con β_H coefficiente di Hall.

Le (1), (2), (3) costituiscono un sistema non lineare di 7 equazioni differenziali alle derivate parziali in 7 funzioni incognite scalari: le tre componenti di $\boldsymbol{v}$, le tre di $\boldsymbol{B}$ e p.

Prendendo il rotore di ambo i membri della (1) si ottiene la

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{4\pi\mu\rho} \operatorname{rot}[(\operatorname{rot}\boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B}] + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \tag{5}$$

Le equazioni (3), (5) esprimono le condizioni caratteristiche affinché un campo di velocità $\boldsymbol{v}$ ed un campo magnetico $\boldsymbol{B}$ solenoidali competano ad un moto MFD di un fluido viscoso incomprimibile. In analogia con la nomenclatura idrodinamica, chiamiamo la (5) *equazione di compatibilità.*

Determinata una soluzione solenoidale $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B})$ del sistema (5), (3), la pressione si ricava dalla (1) per quadrature.

Introdotta una terna galileiana di coordinate cilindriche ortogonali $T(0;\ r, \varphi, z)$ di versori $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$ con Oz asse fisso di rotazione, per i moti in questione è

$$\boldsymbol{v} = \Omega(t)\, r \boldsymbol{e}_\varphi \tag{6}$$

dove $\Omega(t)$ indica la grandezza della velocità angolare.

Per (6), la (2) è identicamente soddisfatta e $\nabla^2 \boldsymbol{v} = 0$ (come è ovvio anche da un punto di vista meccanico); inoltre sussistono le

$$\begin{gathered} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \dot{\Omega} r \boldsymbol{e}_\varphi \qquad \boldsymbol{\omega} = 2\Omega \boldsymbol{e}_z \quad \text{(ovvia)} \\ \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{\omega} = \operatorname{grad} \Omega^2 r^2 \qquad \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) = 0 \qquad \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

La (5) diventa per (7)

$$2\dot{\Omega} \boldsymbol{e}_z = \frac{1}{4\pi\mu\rho} \operatorname{rot}[(\operatorname{rot}\boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B}]. \tag{8}$$

Tenuto conto che la forza magnetica per unità di volume vale

$$\frac{1}{4\pi\mu} (\operatorname{rot}\boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B}$$

da (8) seguono subito le affermazioni 1, 2, 3 di cui sopra e da (8), (3) l'affermazione 4. (Facendovi $\boldsymbol{B} = 0$, da (8) segue pure immediatamente il risultato dell'idrodinamica ordinaria).

Naturalmente, ferme restando le affermazioni 1-4, rotazioni rigide MFD saranno effettivamente possibili solo in corrispondenza a campi magnetici (solenoidali), che con (6) siano soluzioni esatte di (3) e (8).

Una classe significativa di tali soluzioni esatte è stata determinata in [5]:

$$B = (c_1 r + \frac{c_2}{r}) e_\varphi + (c_3 \log r + c_4) e_z \tag{9}$$

con c_1, c_2, c_3, c_4 costanti arbitrarie.

Un'altra classe di soluzioni esatte è la seguente

$$B = -arze_r + a(2r^2 + z^2 - h^2) e_z \tag{10}$$

con a ed h costanti.

Il campo magnetico (10) è *del tipo di Hill* (nel senso che un campo cinetico avente la dipendenza da r e da z del tipo (10) caratterizza in idrodinamica i moti di Hill). Esso ha fra l'altro interesse in magnetoidrostatica in problemi connessi con le stelle magnetiche (cfr. [3] n. 2.3 e [4] n. 5.4).

Bibliografia

[1] U. CISOTTI, *Sui moti rigidi di una massa fluida limitata*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **25** (1916), 635-639.

[2] U. CISOTTI, *Lezioni di meccanica razionale*, Libreria Editrice Politecnica, Milano 1926.

[3] V. C. A. FERRARO and C. PLUMPTON, *An introduction to magneto-fluid mechanics*, Oxford 1966.

[4] P. C. KENDALL and C. PLUMPTON, *Magnetohydrodynamics with hydrodynamics*, Pergamon Press, New York 1964.

[5] G. MATTEI, *Sulle rotazioni rigide in meccanica dei plasmi*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **67** (1979), 404-407.

[6] G. MATTEI, *Una osservazione sulle rotazioni rigide in magnetofluidodinamica*, Atti Accad. Sci. Torino **118** (1984), 181-184.

[7] P. PIZZETTI, *Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti*, Spoerri, Pisa 1913.

Summary

Some remarks are given on the rigid rotations in magnetofluiddynamics.

* * *