Riv. Mat. Univ. Parma (5) 2 (1993), 71-82

CARLA CALVI PARISETTI (*)

Probabilità in matematica (**)

A Bianca Manfredi con amicizia e stima

1 - Introduzione

Nel marzo del 1992, fui invitata a tenere una relazione al Convegno *Per una storia del calcolo delle probabilità* organizzato dal Centro di Ricerca PRISTEM (Progetto Ricerche Storiche e Metodologiche) presso l'Università Bocconi. Avevo saputo che alcuni relatori avevano indicato titoli come *Probabilità in fisica, Probabilità in biologia* ...; alla richiesta di indicare un titolo risposi in modo spontaneo *Probabilità in matematica.*

Di fatto, la probabilità è una disciplina matematica, ma ritenevo che il titolo così formulato mi consentisse di provocare in qualche misura l'uditorio — costituito prevalentemente di docenti di matematica delle scuole medie superiori — a una maggiore attenzione alla probabilità nell'ambito dei loro corsi. Frequentemente infatti, la matematica insegnata è solo la matematica della certezza: scienza esatta, portatrice di conoscenza sicura e universale. Nullo o scarso spazio è dedicato alla probabilità come misura dell'incerto.

Avevo articolato la relazione in due parti: nella prima illustravo un aspetto meno noto della probabilità, quello di strumento della matematica della certezza; nella seconda parte presentavo la probabilità come misura dell'incerto e suggerivo come inserire in un corso di matematica i fondamenti della probabilità e della statistica. Sviluppavo così, almeno parzialmente, il titolo *Probabilità in matematica*: strumento per pervenire a risultati matematici importanti e parte significativa della cultura matematica.

In questo lavoro intendo riferire il contenuto della conferenza.

(*) Dip. di Matem., Univ. Parma, Via M. d'Azeglio 85, 43100 Parma, Italia.
(**) Ricevuto il 27.5.1993. Classificazione AMS 60 01.

Nella prima parte, dopo aver esposto brevemente la storia della legge normale (o legge di Gauss o degli errori) e il suo ruolo nella teoria della probabilità e nella statistica, traccio la dimostrazione di un risultato di teoria dei numeri relativo alla distribuzione normale che compete ai divisori primi degli interi, dovuto a Kac e Erdös e segnalo il notevole significato metodologico del ragionamento per analogia da essi seguito. Successivamente metto in evidenza un uso più strumentale di alcuni risultati della teoria della probabilità per dimostrare il teorema di Weierstrass di approssimazione di una funzione continua.

La seconda parte è una proposta di contenuti per un breve corso di probabilità e di statistica nella matematica della scuola media superiore: sono indicati e appena commentati dieci argomenti sui quali far riflettere ed esercitare gli studenti in un ragionevole numero di ore. Alcuni buoni volumi a cui riferirsi sono indicati in bibliografia.

2 - La probabilità come strumento della matematica della certezza

2a - *La legge normale*

Nel secolo 18° la teoria delle probabilità si sviluppò notevolmente per opera di J. Bernoulli e di A. De Moivre. Al primo si deve la prima formulazione di una legge debole dei grandi numeri (1713) e al secondo un celebre teorema che può essere considerato il primo teorema di limite centrale (1718). Entrambi i risultati si riferiscono al comportamento limite delle frequenze relative $\frac{f_n}{n}$ di un evento A di probabilità $P(A) = p$ in una serie di n osservazioni indipendenti.

Il teorema di Bernoulli esprime che la probabilità, che la deviazione della frequenza relativa $\frac{f_n}{n}$ da p sia maggiore in valore assoluto di una quantità arbitraria positiva ε, tende a zero al tendere di n all'infinito. Brevemente

$$P(|\frac{f_n}{n} - p| > \varepsilon) \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty \,. \tag{2.1}$$

Il risultato di Bernoulli si deduce dal teorema di De Moivre che consente una valutazione asintotica della probabilità $P(a < f_n < b)$ con a, b reali e $a < b$.

Indicata con $q = (1 - p)$ la probabilità dell'evento A^c, complementare di A, il teorema di De Moivre esprime che la probabilità che la frequenza dell'evento A convenientemente standardizzata attraverso la trasformazione lineare $\lambda = \frac{f_n - np}{\sqrt{npq}}$ sia compresa nell'intervallo (λ_1, λ_2) converge, al tendere di n all'infinito, alla differenza del valore della funzione distribuzione normale calcolata in λ_2 e quello della stessa funzione calcolata in λ_1

$$(2.2) \qquad P(\lambda_1 < \lambda < \lambda_2) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_1)$$

essendo la funzione distribuzione normale definita da

$$(2.3) \qquad \Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{\frac{-x^2}{2}} dx.$$

Nel caso tipico del lancio di una moneta, la probabilità che il numero f_n delle teste in n lanci sia compreso in un assegnato intervallo, calcolata esattamente è la somma di un numero finito di termini, calcolata in modo approssimato per n grande è la differenza di due funzioni integrali. Precisamente, poiché la probabilità che la frequenza f_n di teste in n prove sia uguale a k è data da $P(f_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, segue che

$$P(a < f_n < b) = \sum_{a<k<b} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Però, se n è sufficientemente grande e

$$a = np - \sqrt{npq}\,\lambda_1 \qquad b = np + \sqrt{npq}\,\lambda_2$$

risulta $\quad P(a < f_n < b) = P\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} < \frac{f_n - np}{\sqrt{npq}} < \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{\frac{-x^2}{2}} dx.$

In forza del precedente teorema se il numero n dei lanci è sufficientemente grande e si prendono l'origine e una scala opportuni (l'origine in $\frac{n+1}{2}$, si moltiplica l'unità di misura sull'asse verticale per $\sqrt{npq}$ e si divide l'unità di misura sull'orizzontale per la stessa quantità), il contorno dell'istogramma delle probabilità di k teste in n lanci di una moneta si trasforma in una curva continua a forma di campana, simmetrica rispetto a np (Fig. 1).

La curva continua di equazione

$$(2.4) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

che appare in Fig. 1 è nota come *curva normale* o *gaussiana* perché fu dedotta da Gauss intorno al 1809 in relazione al problema della determinazione delle or-

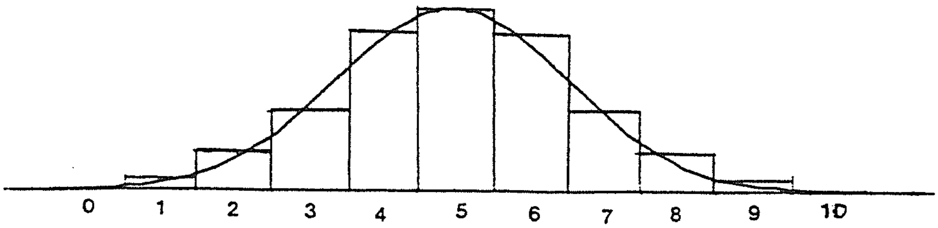

Fig. 1.

bite degli asteroidi: si trattava di determinare l'ellisse che meglio si accordava con i dati osservati affetti da errore.

Ma il problema di Gauss si pone tutte le volte che, eseguendo misure di precisione di una grandezza, per esempio dello spigolo di un tavolo di lunghezza m incognita, vogliamo determinare la probabilità che una singola misura X sia compresa tra a e b. Sotto ipotesi ragionevoli, la risposta di Gauss è che tale probabilità è data dall'area sottesa alla curva normale, per $a < x < b$ (Fig. 2).

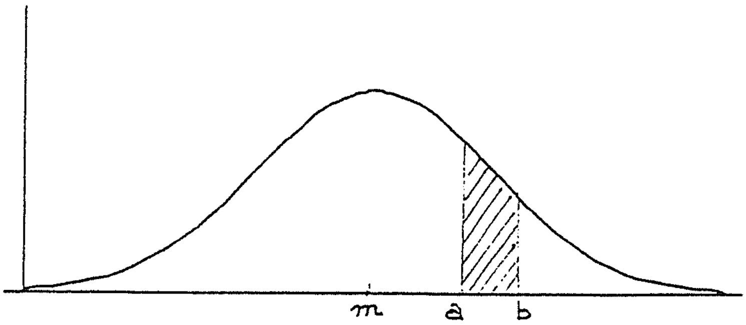

Fig. 2.

In formula

$$P(a < X < b) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

dove σ è la deviazione standard, reciproco della precisione dello strumento di misura e gli estremi $A = \dfrac{a-m}{\sigma}$ e $B = \dfrac{b-m}{\sigma}$ sono ottenuti dal semplice cambiamento di variabili.

Nel 1810, Laplace mise in rilievo la proprietà significativa che caratterizza la legge normale, dimostrando che se X è la somma di un numero elevato di numeri aleatori *indipendenti* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, allora X segue la legge normale con una approssimazione tanto migliore quanto più i singoli X_i sono trascurabili rispetto ad X.

Quindi se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono numeri aleatori *indipendenti* che assumono valori 1 e 0 con probabilità p e $q = 1 - p$ rispettivamente (come nel caso del lancio della moneta n volte), la somma $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (che è la frequenza f_n delle teste) è approssimativamente distribuita in modo normale e ritroviamo il risultato di De Moivre illustrato nella Fig. 1.

Analogamente, l'errore complessivo $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, somma di un gran numero di errori *indipendenti*, segue la legge normale e ritroviamo il risultato di Gauss illustrato in Fig. 2.

La frequenza delle teste e l'errore complessivo sono somma di numeri aleatori indipendenti e seguono asintoticamente la stessa legge normale.

A Tchebychev, Markov, Ljapunov, Lindeberg e ad altri si devono i *teoremi di limite centrale*, che esprimono le condizioni per cui la somma di variabili aleatorie ha asintoticamente distribuzione normale. Una condizione determinata da Lindeberg è che le variabili costituenti la somma siano indipendenti e ugualmente distribuite, come accade nei casi che abbiamo considerato della frequenza e dell'errore. In base al teorema di Lindeberg anche la somma degli errori di arrotondamento di n numeri al più vicino intero (ciascun errore si può ritenere distribuito uniformemente tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$) si distribuisce asintoticamente secondo la legge normale.

La formulazione del teorema di limite centrale, data da Laplace, per la sua generalità ha una grande importanza nella teoria della probabilità, come anche De Finetti rileva in [2], in relazione al problema di come giustificare elementarmente la legge *normale* della probabilità.

Per una legge di variabilità *naturale*, anche la statura degli uomini, le dimensioni del cranio di una popolazione, la dimensione dei fagioli, ecc. obbediscono alla legge normale.

La diffusione della legge normale in tanti fenomeni di diversa natura, ha indotto a pensare che molte distribuzioni che si incontrano in pratica siano normali, tanto da far dire a Poincaré *tout le monde y croit (la lois des erreurs) par ce que les mathématiciens s'imaginent que c'est un fait d'observation, et les observateurs que c'est un théorème de mathématiques.*

Si potrebbe però pensare che ad accomunare nella stessa distribuzione asintotica di probabilità gli errori di misura, i lanci della moneta, gli errori di arrotondamento, le stature, le dimensioni dei crani, sia il caso.

Ma, non sempre ciò accade ....

2b - *Un risultato di teoria dei numeri: ragionare per analogia*

Mark Kac (1914-1984), il grande matematico e probabilista polacco che ha avuto la capacità nei suoi lavori di utilizzare intuizioni e tecniche della teoria della probabilità in campi diversi dalla probabilità, determinò insieme a Erdös un interessante e curioso risultato di teoria dei numeri. Nella sua autobiografia [6], in relazione a tale risultato, dichiara con stupore *stentavo a credere che una legge che aveva a che fare con gli istogrammi empirici e con i giochi d'azzardo potesse far parte della matematica ordinaria.*

Il risultato può essere descritto nel seguente modo: si consideri un numero intero grande, per es. $N = 10.000$ e si conti quanti degli interi minori di 10.000 hanno un solo divisore primo, quanti due divisori primi, quanti tre, ecc., senza contare la molteplicità. Indicando con $\nu(n)$ il numero dei divisori primi di n segue perciò che $\nu(2) = \nu(3) = \nu(4) = \nu(5) = 1$, $\nu(6) = 2$, ...

Se si rappresenta l'istogramma delle frequenze e si assumono l'origine e la scala opportunamente, esso risulta indistinguibile dalla curva normale (2.4). Più precisamente, il teorema di Kac e Erdös [4] afferma

Sia $K_n(a, b)$ il numero degli interi m, $1 \leq m \leq n$ per cui

$$\log\log n + a\sqrt{\log\log n} < \nu(m) < \log\log n + b\sqrt{\log\log n}.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n(a, b)}{n} = \int_a^b e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx. \tag{2.5}$$

Kac contribuì in modo rilevante alla determinazione del risultato precedente grazie alla capacità di ragionare per analogia. Aveva infatti dedicato molte energie allo studio della legge normale, al concetto di indipendenza stocastica e in seguito a quello di funzioni indipendenti [4], su indicazione di Steinhaus.

Una traccia del ragionamento seguito da Kac per raggiungere il risultato è la seguente. Se A è un insieme di interi positivi, sia $A(N)$ il numero dei suoi elementi tra i primi N interi. Il limite

$$D(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{A(N)}{N}$$

se esiste viene chiamato *densità di A.*

Segue che la densità degli interi pari è uguale a $\frac{1}{2}$, la densità degli interi divisibili per 3 è uguale a $\frac{1}{3}$ e in generale la densità degli interi divisibili per il numero primo p è uguale a $\frac{1}{p}$. Consideriamo l'insieme dei numeri divisibili per p e per q (anche q primo) e quindi divisibili per pq; la densità di tale insieme è uguale a $\frac{1}{pq}$. Ma $\frac{1}{pq} = \frac{1}{p}\frac{1}{q}$. Quindi, per ogni n l'essere divisibile per p è indipendente (nel senso delle funzioni indipendenti) dall'essere divisibile per q. Se si pone per ogni intero n e per ogni primo p

$$X_p(n) = 1 \quad \text{se } n \text{ è divisibile per } p \qquad X_p(n) = 0 \quad \text{se } n \text{ non è divisibile per } p$$

i numeri $X_p(n)$ sono indipendenti al variare di p e inoltre

$$\nu(n) = X_2(n) + X_3(n) + X_5(n) + \dots$$

è il numero dei divisori primi di n. A questo punto, l'analogia con il teorema di Laplace è trasparente. Il numero dei divisori primi di n è somma di funzioni indipendenti. Da questa osservazione Kac e Erdös pervennero a (2.5) con una dimostrazione che non è qui il caso di riportare.

La legge di distribuzione normale accomuna quindi gli errori di misura dello spigolo di un tavolo, il numero di successi in n lanci di una moneta, le stature degli uomini di una popolazione, ma anche i divisori primi di un intero e molti altri risultati. Nell'autobiografia citata Kac dice: *Chiedo venia al lettore per la mia immodestia, ma è davvero un gran bel teorema. Grazie ad esso la legge normale poteva uscire dal mondo delle scommesse, delle statistiche e delle osservazioni per entrare nella teoria dei numeri e inaugurare una nuova branca di questa antica disciplina.*

2c - *Il teorema di approssimazione di Weierstrass: l'uso intelligente del metodo probabilistico*

Un altro risultato dell'uso intelligente della probabilità in matematica è relativo al teorema di approssimazione di Weierstrass che asserisce che per ogni funzione reale e continua u: $[0, 1] \to \boldsymbol{R}$ e ogni $\varepsilon > 0$, esiste un polinomio $h(x)$ tale che $|h(x) - u(x)| \leq \varepsilon$ per ogni $x \in [0, 1]$.

Argomentazioni probabilistiche semplici conducono al risultato e indicano anche il tipo di polinomi, detti di Bernstein, che approssimano uniformemente u. La dimostrazione [3] del teorema si fonda su una conseguenza della legge debole dei grandi numeri nella formulazione del teorema di Bernoulli, esposto in **2a**.

Ricordiamo che f_n in (2.1) rappresenta la frequenza dell'evento A di probabilità p in una serie di n osservazioni (per es. la frequenza di teste in n lanci di una moneta) e che (2.1) esprime la convergenza in probabilità di $\frac{f_n}{p}$ a p. Ciò si può indicare brevemente $\frac{f_n}{n} \xrightarrow{p} p$.

Si dimostra che, se u è una funzione continua, risulta anche $u(\frac{f_n}{n}) \xrightarrow{p} u(p)$. Quindi per grandi n, con probabilità elevata $u(\frac{f_n}{n})$ è prossima a $u(p)$.

Si dimostra di più, che essendo u anche limitata, il valore atteso $E[u(\frac{f_n}{n})]$ di $u(\frac{f_n}{n})$ è prossimo a $u(p)$ nel senso che per $n \to \infty$

$$E[u(\frac{f_n}{n})] \to u(p) \quad \text{uniformemente.} \tag{2.6}$$

La dimostrazione della (2.6) si può fare in poche righe, richiedendo questa essenzialmente l'osservazione che la varianza di $\frac{f_n}{n}$ tende a 0 per $n \to \infty$ e l'uso della diseguaglianza di Tchebychev, ma non è qui il caso di richiamarla.

Ora, l'attesa di $u(\frac{f_n}{n})$ è data da

$$E[u(\frac{f_n}{n})] = \sum_{k=0}^{n} u(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{2.7}$$

e quindi segue da (2.6) e da (2.7) che, se u è una funzione continua sull'intervallo $[0, 1]$, essa è approssimata uniformemente da una combinazione lineare di polinomi del tipo $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Nella forma (2.7), tali polinomi sono detti *polinomi di Bernstein* di grado n e indicati con $B_{n,u}(p)$.

Pertanto, se u è continua nell'intervallo $[0, 1]$, per ogni $\varepsilon > 0$

$$|B_{n,u}(p) - u(p)| < \varepsilon \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1$$

per n sufficientemente grande. È così dimostrato il teorema di Weierstrass e in più è identificata la forma dei polinomi approssimanti.

I risultati sopra riportati sono solo due esempi di utilizzazione del metodo probabilistico nella matematica della certezza, ma molti altri potrebbero essere indicati. Coloro che hanno operato con successo in questo settore erano matematici che conoscevano a fondo la probabilità e sapevano integrarla nel vasto ambito della matematica.

Tuttavia il ruolo principale della probabilità è quello di misura dell'incerto. I primi rudimenti dovrebbero essere impartiti in tutte le scuole medie superiori.

3 - La probabilità come misura dell'incerto

In questa seconda parte del lavoro propongo un elenco commentato di argomenti di probabilità e di statistica inferenziale che a mio parere potrebbero essere presentati in circa 20 ore, in un corso di matematica della scuola media superiore. Si tratta di contenuti minimi connessi con le distribuzioni discrete di probabilità; essi richiedono solo conoscenze elementari di matematica e tuttavia permettono di contribuire a formare una mentalità probabilistica.

Questo breve corso è incentrato sul processo di Bernoulli che, esemplificando è il processo di *lanciare una moneta* o di *estrarre con rimpiazzamento da un'urna*.

Più precisamente, si parla di *processo di Bernoulli* tutte le volte che ripetendo un esperimento

i) l'esito di ciascun esperimento è l'evento A o il suo complementare A^c

ii) gli esiti dei successivi esperimenti sono indipendenti l'uno dall'altro

iii) la probabilità di A (e quindi di A^c) in ogni esperimento è sempre la stessa.

Evidentemente, la sequenza degli esiti del lancio di una moneta o della estrazione con rimpiazzamento da un'urna costituisce un processo di Bernoulli. Va subito osservato che l'esemplificazione ai modelli citati non è un esercizio inutile o astratto: calcolare la probabilità di 3 palline bianche in 10 estrazioni non è diverso dal calcolare la probabilità che 3 articoli siano difettosi tra 10 esaminati, che tre persone tra 10 interrogate, rispondano di votare *si* al referendum, e così via. Nei due modelli citati è nascosta una grande varietà di problemi e il chiaro riferimento ad essi evita inutili ripetizioni.

Nel modello delle estrazioni con rimpiazzamento da un'urna contenente N palline delle quali una frazione θN bianche, con $0 \leq \theta \leq 1$ e $\theta N \in N$, e le restanti $(1 - \theta)N$ nere, si potrebbe essere interessati a problemi di due tipi

1 al calcolo della probabilità di un evento più complesso rispetto agli eventi *la pallina estratta è bianca*. Per esempio alla probabilità dell'evento *k estrazioni di pallina bianca in n estrazioni* o dell'evento *pallina bianca per la prima volta all'n-ma estrazione* ecc., nell'ipotesi che la frazione di palline bianche dell'urna sia assegnata.

2 ad avere informazioni sulla frazione θN di palline bianche, avendo osservato gli esiti di n estrazioni.

I problemi di tipo 1 sono problemi di *calcolo delle probabilità* la cui soluzione richiede un *ragionamento deduttivo*; quelli di tipo 2 sono problemi di *statistica* *inferenziale* la cui soluzione richiede un *ragionamento induttivo*. Questi ultimi sono molto frequenti nella vita quotidiana: non è nota la frazione θ di votanti *sì* al referendum tra N che voteranno; si interrogano n persone e si inferisce su θ.

Nell'elenco che segue, gli argomenti di statistica inferenziale sono tuttavia appena accennati per contenetere l'eventuale esposizione agli studenti in un tempo ragionevole e seguono quelli di calcolo delle probabilità, essenziali per l'applicazione statistica. Gli argomenti sono raccolti sotto 10 titoli e molti riferimenti ad essi relativi possono trovarsi in [9], mentre considerazioni più generali sulla probabilità e sulla statistica matematica sono esposti alla maniera di intelligente divulgazione in [5] e [8]. Una ricca sorgente di esercizi si trova ancora in [9] e in [1].

3a - *Probabilità in un corso di matematica*

1 *Eventi e algebra degli eventi.* Il concetto di evento è introdotto in modo logico e così le operazioni tra eventi.

2 *Probabilità di un evento.* Viene definita in modo soggettivo e le proprietà sono desunte dal concetto di scommessa coerente. Teorema delle probabilità totali.

3 *Valutazioni di probabilità.* Quando è possibile e quando è lecita la definizione classica di probabilità come rapporto tra il numero di eventi favorevoli e numero degli eventi possibili. Riconoscere gli eventi equiprobabili. Lo schema celle-oggetti.

4 *Eventi condizionati e loro probabilità. Indipendenza.* Definizione ed esempi: estrazioni con o senza rimpiazzamento da un'urna di composizione nota. Eventi equiprobabili e indipendenti; eventi equiprobabili e non indipendenti. Valutazione frequentistica della probabilità.

5 *Il processo di Bernoulli.* Calcolo della probabilità di k successi in n prove. Rappresentazione di istogrammi.

6 *Numeri aleatori semplici e discreti.* L'introduzione di questo argomento permette di utilizzare un linguaggio più generale che evita il riferimento agli eventi. Può avere un significato anche in vista di futuri ampliamenti dell'argomento probabilità.

7 *Approssimazione normale e di Poisson.* Si espongono solo i risultati dei teoremi di De Moivre-Laplace e di Poisson. Si riutilizzano gli istogrammi della distribuzione binomiale e si mostra qualitativamente il comportamento limite. Si

insegna a risolvere alcuni problemi facendo uso delle tavole della distribuzione normale e di Poisson.

8 *Il teorema di Bayes e il suo ruolo nell'inferenza statistica.* La probabilità a posteriori ottenuta aggiornando l'informazione a priori con l'esperienza permette di rispondere a quesiti del tipo: «quale è la composizione più probabile dell'urna, se ho osservato h bianche in n estrazioni?», «quale è la statura media più probabile della popolazione maschile italiana, se ho osservato la statura di n individui di tale popolazione?» ecc.

9 *Estrazioni con rimpiazzamento da un'urna di composizione incognita.* Gli eventi sono equiprobabili, ma non indipendenti. Sussiste solo l'indipendenza condizionata alla composizione dell'urna. Nella stessa situazione «fisica» di estrazioni con rimpiazzamento, se è nota la composizione dell'urna gli eventi sono indipendenti, se non è nota gli eventi sono dipendenti. La dipendenza è dovuta a una modifica dello stato di informazione.

10 *Il campionamento casuale semplice.* Si osserva il risultato di n estrazioni con rimpiazzamento e si inferisce sulla frazione di palline bianche nell'urna.

4 - Conclusione

La probabilità ha un ruolo importante e forse frequentemente sconosciuto nella matematica della certezza, in particolare nella teoria dei numeri e nell'analisi, ma il suo ruolo principale è quello di misura dell'incerto. Alla scarsa attenzione prestata per molti anni alla probabilità in ambito matematico, ha certamente contribuito non solo il problema dei fondamenti di questa disciplina, a lungo oggetto di diatribe, ma anche la diffusa mentalità che la matematica è altro dalle applicazioni [7].

Probabilità non è sinonimo di valutazione approssimativa o di mancanza di rigore nel ragionamento, ma è valutazione della misura dell'incerto eseguita con criteri razionali.

Attualmente, la situazione si è modificata e la probabilità costituirà una parte dei programmi di matematica delle scuole medie e sarà un corso obbligatorio per il conseguimento della laurea in matematica.

Io penso che uno dei motivi per cui tanti studenti della scuola media sono disamorati allo studio della matematica è che spesso non vedono alcun collegamento tra tale disciplina e quello che osservano. È molto importante a mio parere ristabilire questo collegamento. Far rientrare questa disciplina nella matematica che si insegna a tutti i livelli, contribuirà anche ad avvicinare la matematica al senso comune, se è vero che *le questioni più importanti della vita sono problemi di calcolo delle probabilità*, come affermava Laplace.

La matematica della certezza costituisce uno schema di grandissimo valore conoscitivo, ma quella sua parte costituita dalla probabilità risponde ai più frequenti problemi della vita.

Bibliografia

[1] K. BAKLAWSKI, M. CERASOLI e G. C. ROTA, *Introduzione alla probabilità*, Zanichelli, Bologna 1984.

[2] B. DE FINETTI, *Come giustificare elementarmente la «legge normale» della probabilità?*, Periodico di Matematiche 14 (1934), 197-210. B. DE FINETTI, *Scritti (1931-1936)*, Pitagora, Bologna 1991.

[3] W. FELLER, *An introduction to probability theory and its applications*, 2, Wiley, Chichester, England 1966.

[4] M. KAC, *Statistical independence in probability and number theory*, Carus Math. Monographs, The Mathematical Association of America, Wiley, Chichester, England 1959.

[5] M. KAC, *Probabilità*, Le Scienze Matematiche, a cura dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, Bologna 1973.

[6] M. KAC, *Gli enigmi del caso. Vicissitudini di un matematico*, Boringhieri, Torino 1986.

[7] M. KAC, G. C. ROTA e J. T. SCHWARTZ, *Discrete thoughts, essay on mathematics, science and philosophy*, Birkhauser, Boston 1986.

[8] J. KIEFER, *Inferenza statistica*, Le Scienze Matematiche, a cura dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, Bologna 1973.

[9] R. SCOZZAFAVA, *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Veschi-Masson, Roma-Parigi 1991.

Summary

A conference presented to high school teachers is exposed. Two examples are given of how to solve mathematical problems by the use of probabilistic methods and a short course of probability and inferential statistics for high school students is proposed.

* * *