Riv. Mat. Univ. Parma (5) 2 (1993), 93-101

G. AMENDOLA e A. MANES (*)

Un'osservazione sull'equazione di continuità nello studio delle varietà caratteristiche (**)

A Bianca Manfredi con amicizia e stima

1 - Introduzione

Il moto di un qualsiasi sistema continuo, com'è noto, deve essere compatibile con l'*equazione di continuità,* che esprime la conservazione della massa del continuo stesso. Introdotto il concetto di densità materiale, questa diventa una delle funzioni incognite del posto e del tempo nel sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, che regolano il comportamento del particolare sistema in esame.

In questo lavoro si rivolge l'attenzione alla termoelasticità linearizzata e alla meccanica dei fluidi viscosi, facendo riferimento a due fondamentali lavori [1] e [2] per quanto concerne lo studio delle *superfici caratteristiche* associate ai due sistemi di equazioni corrispondenti.

In [1] l'equazione di continuità viene integrata rispetto al tempo e non viene considerata in 5, cioè limitatamente alla ricerca delle ipersuperfici che risultano eccezionali nella risoluzione del problema di Cauchy relativo alle equazioni della termoelasticità linearizzata. L'equazione caratteristica, ricavata in [1], mette in evidenza la possibilità di avere una effettiva propagazione di fronti d'onda, associati alle varietà caratteristiche, con le ben note velocità v_T e v_S.

(*) Istituto di Matem. Appl., Fac. di Ingegneria, Univ. Pisa, Via Diotisalvi 2, 56126 Pisa, Italia; Dip. di Matem., Via Buonarroti 2, 56127 Pisa, Italia.

(**) Ricevuto l'1.6.1993. Classificazione AMS 76 A 10. Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del CNR con finanziamenti del MURST.

In [2] viene dimostrata l'impossibilità di avere superfici di discontinuità variabili nel tempo e cioè l'inesistenza di propagazioni ondose nei fluidi viscosi. In questo caso lo studio è fatto considerando le caratteristiche del sistema di equazioni, che regolano il moto dei fluidi viscosi: l'equazione di moto e quella di continuità. Quest'ultima, esaminata a parte, viene poi trascurata dopo aver scartato a priori la possibilità di avere una superficie di discontinuità fissa.

In questa nota si ripercorrono le strade seguite in questi due lavori lasciando però l'equazione di continuità nel sistema di equazioni che regolano il comportamento dei continui esaminati, allo scopo di esaminare direttamente le conseguenze che essa comporta nello studio delle relative superfici caratteristiche. In entrambi i casi si ha una modifica dell'equazione caratteristica che consiste semplicemente nella presenza della velocità del fronte d'onda a fattore nelle equazioni già ottenute nei due lavori citati; pertanto, oltre ai risultati già trovati in [1] e [2], dall'esame dell'equazione caratteristica segue anche la possibilità di avere un'onda fissa.

2 - Termoelasticità lineare

2a - *Equazioni fondamentali*

Si consideri un solido termoelastico C, omogeneo ed isotropo, che occupi una configurazione di riferimento naturale, caratterizzata da componenti nulle del tensore degli sforzi e dai valori uniformi ρ_0 e T_0 della densità materiale e della temperatura. A partire da detta configurazione, assunta come stato iniziale del corpo, supponiamo di avere piccole deformazioni termoelastiche, in modo da potere assumere per esse il *sistema di equazioni linearizzate*

$$(2.1) \qquad \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{pi}}{\partial x_p} \qquad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial h_p}{\partial x_p} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_p}{\partial x_p} = 0 \qquad i, p = 1, 2, 3 .$$

Esse sono rispettivamente le equazioni di moto, del calore e di continuità, in assenza di forze di massa e di sorgenti termiche, avendo indicato con v_i, σ_{pi}, h_p le componenti del vettore velocità, del tensore degli sforzi e del flusso di calore in un prefissato sistema di coordinate cartesiane ortogonali x_i, ed infine con u e ρ l'energia interna specifica e la densità materiale nella configurazione occupata da C al tempo t.

A queste equazioni vanno associate le *equazioni costitutive*, che per deformazioni infinitesime, assumono la seguente forma linearizzata

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij} = \rho_0(v_T^2 - 2v_S^2)\, e_{pp}\delta_{ij} + 2\rho_0 v_S^2 e_{ij} - \frac{\alpha}{k_T}\,\vartheta\delta_{ij} \qquad j = 1, 2, 3 \\ &h_i = k\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i} \qquad (k > 0) \qquad u = \frac{\alpha T_0}{\rho_0 k_T}\, e_{pp} + c_e\vartheta \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove, indicando con u_i le componenti del vettore spostamento linearizzato, è

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) \qquad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \tag{2.3}$$

inoltre

$$v_T^2 = \frac{E_T(1-\nu_T)}{\rho_0(1+\nu_T)(1-2\nu_T)} \qquad v_S^2 = \frac{E_T}{2\rho_0(1+\nu_T)} \tag{2.4}$$

ϑ è la variazione della temperatura rispetto a T_0 ed infine α, c_e, k, E_T, ν_T e

$$k_T = \frac{3(1-2\nu_T)}{E_T} \tag{2.5}$$

sono le ben note costanti caratteristiche del materiale.

Tenendo conto di tutte queste relazioni, il sistema di equazioni (2.1) può essere espresso in funzione di u_i e ϑ ed assume la seguente forma

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = v_S^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_p\,\partial x_p} + (v_T^2 - v_S^2)\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i\,\partial x_p} - \frac{\alpha}{\rho_0 k_T}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i} \\ &\rho_0 c_e\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \frac{\alpha T_0}{k_T}\frac{\partial^2 u_p}{\partial t\,\partial x_p} = k\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_p\,\partial x_p} \\ &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial^2 u_p}{\partial t\,\partial x_p} = 0\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

La notazione usata coincide con quella del lavoro [1], al quale si rimanda per la trattazione completa del problema relativo alle superfici singolari nei solidi termoelastici in esame.

In [1] l'equazione di continuità $(2.6)_3$ è sostituita da quella che da essa si ottiene integrando rispetto al tempo; ma qui, allo scopo di stabilire le conseguenze che essa può avere sul problema suddetto, preferiamo lasciarla inalterata.

2b - *Ipersuperfici caratteristiche.*

Con riferimento a quanto è stato fatto in [1], ci poniamo il problema di determinare le *varietà caratteristiche* del sistema (2.6), che, contrariamente a quanto accade in [1], comprende l'equazione di continuità $(2.6)_3$.

Si tratta in sostanza di risolvere un problema di Cauchy assegnando, su una opportuna ipersuperficie Σ dello spazio a quattro dimensioni x_i $(i = 1, 2, 3)$ e t, u_i $(i = 1, 2, 3)$ e ϑ, con le loro derivate normali $\dfrac{\partial u_i}{\partial n}$ e $\dfrac{\partial \vartheta}{\partial n}$, e ρ come funzioni analitiche di t e delle coordinate superficiali ξ^1 e ξ^2 assunte su Σ, per ricavare in un intorno di questa la soluzione delle (2.6), che sulla ipersuperficie assuma i dati fissati.

Il problema, com'è ben noto, consiste nell'estendere la soluzione dalla ipersuperficie con serie di potenze, per costruire le quali si devono calcolare sulla ipersuperficie le derivate parziali di ogni ordine rispetto ad x_i e t di u_i $(i = 1, 2, 3)$, ϑ e ρ.

Per fare ciò si devono prendere in considerazione alcuni risultati di geometria differenziale che coinvolgono il versore normale $\boldsymbol{n}$ alla superficie mobile Σ_t, che nello spazio ordinario corrisponde a Σ dello spazio a 4 dimensioni, il tensore metrico, la curvatura media Ω, oltre alla velocità della superficie mobile le cui componenti cartesiane sono

$$V_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \qquad \text{con} \qquad x_i = \phi_i(t, \xi^1, \xi^2) \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.7}$$

cui corrisponde la velocità

$$V = V_p n_p \tag{2.8}$$

nella direzione di $\boldsymbol{n}$ su Σ_t.

Senza scendere nei particolari, per i quali si rimanda, oltre che a [1], al libro di Thomas [3] ed al trattato di Truesdell e Toupin [4], riportiamo solo le condizioni di compatibilità per le derivate parziali prime e seconde di una funzione nota del tempo e dei punti di Σ

$$f = f(t, \phi_1(t, \xi^1, \xi^2), \phi_2(t, \xi^1, \xi^2), \phi_3(t, \xi^1, \xi^2)). \tag{2.9}$$

Per le derivate prime

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g^{\sigma\tau} f_{,\sigma} \phi_{i,\tau} + \frac{\partial f}{\partial n} n_i \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} - g^{\sigma\tau} f_{,\sigma} \phi_{p,\tau} V_p - V \frac{\partial f}{\partial n} \tag{2.10}$$

introducendo la derivata di Thomas [3]

$$\frac{\delta}{\delta t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial n} \tag{2.11}$$

si ha

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\delta f}{\delta t} - V\frac{\partial f}{\partial n} \qquad \frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} - g^{\sigma\tau}\phi_{p,\tau}V_p f_{,\sigma}. \tag{2.12}$$

Per le derivate seconde si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = g^{\sigma\tau}\{(\frac{\partial f}{\partial n})_{,\sigma} + g^{\pi\rho}b_{\sigma\pi}f_{,\rho}\}(n_i\phi_{j,\tau} + n_j\phi_{i,\tau})$$

$$+ g^{\sigma\tau}g^{\pi\rho}(f_{,\sigma\pi} - b_{\sigma\pi}\frac{\partial f}{\partial n})\phi_{i,\tau}\phi_{j,\rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}n_i n_j$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} = g^{\sigma\tau}(\frac{\delta f}{\delta t} - V\frac{\partial f}{\partial n})_{,\sigma}\phi_{i,\tau} + \{\frac{\delta}{\delta t}(\frac{\partial f}{\partial n}) + g^{\sigma\tau}f_{,\sigma}V_{,\tau} - V\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}\}n_i \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\delta}{\delta t}(\frac{\delta f}{\delta t} - V\frac{\partial f}{\partial n}) - V\{\frac{\delta}{\delta t}(\frac{\partial f}{\partial n}) + g^{\sigma\tau}f_{,\sigma}V_{,\tau} - V\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}\}.$$

In queste si è usato un solo sistema di coordinate cartesiane ortogonali, la notazione con la virgola indica le derivate covarianti nel sistema di coordinate (ξ^1, ξ^2) ed infine $g_{\alpha\beta}$, $g^{\sigma\tau}$ e $b_{\alpha\beta}$ sono le componenti del tensore metrico, del suo reciproco e della seconda forma fondamentale su Σ_t.

Se si sostituisce f con le u_i e ϑ nelle (2.10) e (2.12) si calcolano le derivate parziali prime sull'ipersuperficie in funzione dei dati. Analogamente per le derivate parziali seconde con le (2.13), ma la loro determinazione non è completa se non si ricorre alle equazioni $(2.6)_{1,2}$, con le quali si hanno le (32) di [1]. Per quanto riguarda la $(2.6)_3$, assente in [1], si ha [v. $(2.12)_1$ e $(2.13)_2$]

$$\frac{\delta\rho}{\delta t} - V\frac{\partial\rho}{\partial n}$$
$$+ \rho_0\{g^{\sigma\tau}(\frac{\delta u_p}{\delta t} - V\frac{\partial u_p}{\partial n})_{,\sigma}\phi_{p,\tau} + [\frac{\delta}{\delta t}(\frac{\partial u_p}{\partial n}) + g^{\sigma\tau}u_{p,\sigma}V_{,\tau} - V\frac{\partial^2 u_p}{\partial n^2}]n_p\} = 0 \tag{2.14}$$

dove compare la $\dfrac{\partial\rho}{\partial n}$ incognita.

Questa equazione con le altre due, alle quali si perviene con l'uso delle

$(2.6)_{1,2}$, portano al seguente sistema nelle cinque incognite $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial n^2}$, $\dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial n^2}$ e $\dfrac{\partial \rho}{\partial n}$

$$(2.15)\quad \begin{aligned} &(V^2 - v_S^2)\frac{\partial^2 u_i}{\partial n^2} - (v_T^2 - v_S^2)\frac{\partial^2 u_p}{\partial n^2} n_p n_i = U_i \qquad\qquad i = 1, 2, 3 \\ &\frac{\alpha T_0 V}{k}\frac{\partial^2 u_p}{\partial n^2} n_p + k\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial n^2} = \Theta \qquad -\rho_0 V\frac{\partial^2 u_p}{\partial n^2} n_p - V\frac{\partial \rho}{\partial n} = B \end{aligned}$$

dove i secondi membri U_i, Θ, B sono quantità calcolate in corrispondenza dei dati di Cauchy.

Il sistema (2.15) di cinque equazioni permette di calcolare le cinque incognite e completare il calcolo di tutte le derivate seconde di u_i $(i = 1, 2, 3)$ e ϑ e delle derivate prime di ρ sull'ipersuperficie se e solo se il determinante dei suoi coefficienti è diverso da zero; cioè

$$(2.16)\quad \begin{vmatrix} (V^2-v_S^2)-(v_T^2-v_S^2)n_1^2 & -(v_T^2-v_S^2)n_1n_2 & -(v_T^2-v_S^2)n_1n_3 & 0 & 0 \\ -(v_T^2-v_S^2)n_2n_1 & (V^2-v_S^2)-(v_T^2-v_S^2)n_2^2 & -(v_T^2-v_S^2)n_2n_3 & 0 & 0 \\ -(v_T^2-v_S^2)n_3n_1 & -(v_T^2-v_S^2)n_3n_2 & (V^2-v_S^2)-(v_T^2-v_S^2)n_3^2 & 0 & 0 \\ \dfrac{\alpha T_0}{k_T}Vn_1 & \dfrac{\alpha T_0}{k_T}Vn_2 & \dfrac{\alpha T_0}{k_T}Vn_3 & k & 0 \\ -\rho_0 Vn_1 & -\rho_0 Vn_2 & -\rho_0 Vn_3 & 0 & -V \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Se invece in qualche punto dell'ipersuperficie tale determinante è nullo, non potendo calcolare tutte le derivate richieste, non è più possibile costruire una soluzione del problema termoelastico con serie di potenze. Se poi il determinante è nullo dovunque sull'ipersuperficie, questa diventa una varietà caratteristica delle equazioni (2.6), e si dice *equazione caratteristica* delle (2.6) quella che si ricava annullando il determinante (2.16), cioè

$$(2.17)\qquad -kV(V^2 - v_T^2)(V^2 - v_S^2)^2 = 0 .$$

Questa equazione, che differisce da quella ottenuta in [1] solo per la presenza del fattore V, ammette le seguenti soluzioni

$$(2.18)\qquad V_1 = v_T \qquad V_2 = v_S \qquad V_3 = 0 .$$

Le prime due, esaminate in [1], danno due valori della velocità con la quale l'ipersuperficie Σ, che nello spazio ordinario è una superficie mobile, si propaga effettivamente nel solido termoelastico, per il quale essa costituisce un fronte d'onda. In corrispondenza della terza soluzione si ha una superficie fissa e l'onda associata dicesi materiale.

3 - Fluidi viscosi

L'impossibilità di propagazioni ondose nei fluidi viscosi è stata dimostrata in [2], esaminando le equazioni differenziali del moto lento di tali fluidi

$$\text{(3.1)}\qquad \begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = X_i - \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_i} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu\Delta_2 v_i \qquad i, k = 1, 2, 3\\ &\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} + \mu\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0\end{aligned}$$

dove v_i sono le componenti della velocità rispetto ad un fissato sistema di coordinate cartesiane ortogonali x_i, μ è la densità, p la pressione, ν il coefficiente di viscosità, X_i le componenti delle forze di massa, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ indica la derivata sostanziale rispetto al tempo t e Δ_2 l'operatore di Laplace.

Le (3.1) sono un sistema di quattro equazioni nelle incognite v_i $(i = 1, 2, 3)$ e μ, funzioni di x_h $(h = 0, 1, 2, 3)$ con $x_0 \equiv t$. Tale sistema è normale rispetto a t ed in [2] si fa vedere che, con un cambiamento di variabili mediante una generica trasformazione puntuale, il sistema resta normale rispetto a z omologa di t. Pertanto l'univoca esistenza della soluzione del problema di Cauchy per (3.1) continua a valere. Non esistono caratteristiche reali variabili nel tempo e l'impossibilità della propagazione ondosa è così dimostrata.

Nella dimostrazione il sistema (3.1) viene sostituito dal seguente

$$\text{(3.2)}\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{3}\nu p_i\sum_{k=1}^{3} p_k\frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} + \nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2}\sum_{k=1}^{3} p_k^2 - \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\mu}\frac{\partial\mu}{\partial z}p_i = V_i \qquad i = 1, 2, 3\\ &\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mu}{\partial z} = M\end{aligned}$$

dove V_i ed M non contengono le derivate rispetto a z di ordine massimo, essendo

$$\text{(3.3)}\qquad z = z(x_0, x_1, x_2, x_3) = \text{costante}$$

l'equazione dell'ipersuperficie, trasformata di quella relativa ai dati di Cauchy, nelle nuove variabili z, z_k $(k = 1, 2, 3)$ funzioni delle primitive x_h $(h = 0, 1, 2, 3)$.

Nelle (3.2) compaiono solo i termini che contengono le derivate seconde di v_k e la derivata prima di μ rispetto a z. In [2] viene volutamente scartato il caso in cui $\frac{dz}{dt} = 0$, che corrisponde ad una superficie di discontinuità fissa, e, dopo aver eliminato $\frac{\partial \mu}{\partial z}$ con $(3.2)_4$, si studiano solo le $(3.2)_{1,2,3}$. L'equazione alle derivate parziali delle varietà caratteristiche viene fornita dalla condizione che sia nullo il determinante dei coefficienti delle $(3.2)_{1,2,3}$.

Se vogliamo lasciare anche l'equazione $(3.2)_4$, si ottiene il seguente determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}\nu p_1^2 + \nu \sum_{k=1}^{3} p_k^2 & \frac{1}{3}\nu p_1 p_2 & \frac{1}{3}\nu p_1 p_3 & -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{d\mu} p_1 \\ \frac{1}{3}\nu p_2 p_1 & \frac{1}{3}\nu p_2^2 + \nu \sum_{k=1}^{3} p_k^2 & \frac{1}{3}\nu p_2 p_3 & -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{d\mu} p_2 \\ \frac{1}{3}\nu p_3 p_1 & \frac{1}{3}\nu p_3 p_2 & \frac{1}{3}\nu p_3^2 + \nu \sum_{k=1}^{3} p_k^2 & -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{d\mu} p_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.4}$$

la cui risoluzione porta all'equazione ricavata in [2] con a fattore $\frac{dz}{dt}$.

Si ha cioè

$$\frac{dz}{dt} \sum_{k=1}^{3} p_k^2 = 0 \tag{3.5}$$

che, oltre alla soluzione

$$\sum_{k=1}^{3} p_k^2 = 0 \qquad \text{cioè} \qquad p_k = 0 \qquad\qquad k = 1, 2, 3 \tag{3.6}$$

che, esaminata in [2], sancisce l'impossibilità di avere superfici di discontinuità mobili, ammette come soluzione anche

$$\frac{dz}{dt} = 0 \tag{3.7}$$

cioè quella condizione, scartata a priori in [2], in base alla quale si dimostra la possibilità di avere una superficie fissa di discontinuità nei fluidi viscosi.

Bibliografia

[1] P. CHADWICK and B. POWDRILL, *Singular surfaces in linear thermoelasticity*, Internat. J. Engng. Sci. 3 (1965), 561-595.

[2] G. LAMPARIELLO, *Sull'impossibilità di propagazione ondosa nei fluidi viscosi*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **13** (1931), 688-691.

[3] T. Y. THOMAS, *Plastic flow and fracture in solids*, Academic Press, New York 1961.

[4] C. TRUESDELL and R. T. TOUPIN, *The classical field theories*, Handbuch der Physik, 3/1, Springer, Berlin 1960.

Summary

In this note we show that from the equation of mass conservation it follows that, in studying the characteristic manifolds of the linear theory of thermoelasticity and of the mechanics of viscous fluids, we can have a fixed wave-front in these continua.

* * *