Riv. Mat. Univ. Parma (5) 2 (1993), 115-127

TRISTANO MANACORDA (*)

Sulle vibrazioni trasversali di un filo elastico (**)

A Bianca Manfredi con amicizia e stima

1 - Introduzione

In un lavoro, teorico e sperimentale, di qualche anno fa [2], Beatty e Chow hanno esaminato l'andamento della frequenza fondamentale delle piccole vibrazioni trasversali di un filo elastico non lineare teso tra due punti fissi in funzione dell'allungamento nella configurazione (rettilinea) di riferimento. Risultati sperimentali mostrano infatti che tale frequenza tende ad un valore finito al crescere indefinitamente della tensione. Essi adottano la forma del potenziale elastico isotermo proposto da Mooney e Rivlin [10], [12], [13], oppure quella sua versione semplificata (ma pur sempre sperimentalmente conveniente) adatta ai solidi neo-hookeani, ed anche la forma suggerita da un modello più complesso proposto per la gomma in base a considerazioni di meccanica statistica. Nei tre casi provano teoricamente, e verificano sperimentalmente in casi concreti, che la frequenza tende, come deve, ad un limite finito al crescere indefinito dell'allungamento nella configurazione di riferimento.

Si può subito fare una ovvia osservazione: il potenziale di Mooney-Rivlin è stato introdotto per materiali tridimensionali incomprimibili, e non si vede come si possa estendere la nozione di incomprimibilità ad un filo se non pensandolo come limite di un solido tubolare. La difficoltà non ha alcuna importanza dal punto di vista pratico, ma si presenta da un punto di vista concettuale. Inoltre, il vincolo di incomprimibilità introduce una reazione vincolare interna di cui non c'è traccia nel lavoro di Beatty e Chow: si tratta di constatare che non ha alcuna influenza sull'andamento della funzione studiata.

(*) Ist. di Matem. Appl. U. Dini, Fac. Ingegneria, Univ. Pisa.
(**) Ricevuto Il 4.6.1993. Classificazione AMS 73 D 35.

Molti anni fa, A. Signorini, nella ricerca, allora di grande interesse (ma, mi sembra, di interesse pratico anche oggi), di potenziale isotermo adatto a rendere conto del comportamento di un solido perfettamente elastico soggetto a deformazioni finite, propose un potenziale adatto alla cosiddetta Elasticità di secondo grado. Le condizioni perché il potenziale proposto, nel caso di solidi incomprimibili, soddisfacesse alle prime proprietà cui deve soddisfare un potenziale elastico sono state stabilite da tempo [3]; qui si fa vedere che anche in corrispondenza al potenziale W dell'Elasticità di secondo grado la frequenza fondamentale delle piccole vibrazioni di un filo elastico soddisfa alla proprietà asintotica richiesta. Anzi, con una conveniente restrizione per i valori possibili dei coefficienti che figurano in W, peraltro imposte dai dati sperimentali disponibili, la frequenza è funzione crescente dell'allungamento λ, senza presentare quel massimo (per un valore finito di λ) che si manifesta nel caso di Mooney e Rivlin, il che appare poco soddisfacente.

2 - Vincoli interni nei continui isotropi

Un solido elastico isotropo è vincolato se per esso sono possibili solo deformazioni che soddisfino ad una relazione del tipo

$$f(J_1, J_2, J_3;\ \theta, \tau) = 0\ (^1)\,. \tag{2.1}$$

In questa, J_n è l'invariante n-mo del tensore destro di Cauchy-Green, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$, θ è la temperatura (assoluta) attuale, τ la temperatura (uniforme) della configurazione di riferimento. Non è escluso che f dipenda esplicitamente dalle coordinate delle particelle del corpo nella configurazione di riferimento. Un solido è incomprimibile se, per ogni trasformazione isoterma, (2.1) si riduce a

$$J_3 = (\det \boldsymbol{F})^2 = 1\,. \tag{2.2}$$

È ben noto che la presenza di un vincolo implica che lo sforzo non sia più completamente determinato da una equazione costitutiva, ma che contenga una parte atta a rappresentare l'effetto del vincolo interno. Nel caso del vincolo di incomprimibilità, per solidi iperelastici (e trasformazioni isoterme) si ha, per il

(1) Per una definizione ed una trattazione ben più generale, si veda [4].

tensore di Cauchy

$$T = -p\mathbf{1} + \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}F} F^T \tag{2.3}$$

mentre il *tensore di Kirchhoff* K resta espresso da

$$K = T(F^T)^{-1} = -p(F^T)^{-1} + \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}F}\,. \tag{2.4}$$

In queste, p rappresenta l'incognita reazione interna, e W il potenziale elastico isotermo ([2]). Con ciò, le equazioni indefinite e le condizioni al contorno si scrivono, in forma lagrangiana

$$\begin{aligned} &\rho_*(a-b) = \operatorname{div} K = -(F^T)^{-1}\operatorname{grad} p + \operatorname{div} F\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}C} \qquad \text{su } C_* \\ &(-p(F^T)^{-1} + \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}F})N_* = f_* \qquad \text{su } \partial C_* \end{aligned} \tag{2.5}$$

ove si tenga conto che è $\operatorname{div}(F^T)^{-1} = 0$. In queste, le derivate sono fatte rispetto alle coordinate X lagrangiane, a è l'accelerazione, ρ_* la densità nella configurazione di riferimento C_* e f_* la densità delle forze superficiali riportate alla configurazione di riferimento. Le $(2.5)_1$ sono un sistema di tre equazioni, le quali, in unione con la (2.2), devono essere sufficienti a determinare lo spostamento e lo scalare p, subordinatamente alle condizioni al contorno $(2.5)_2$ (ed eventualmente a convenienti condizioni iniziali).

Un solido incomprimibile isotropo omogeneo è *perfettamente elastico* se

a) esistono configurazioni C_τ naturali di equilibrio a temperatura uniforme;

b) tra di esse ce n'è qualcuna, $\bar{C}_\tau$, a partire dalle quali il lavoro degli sforzi è negativo per ogni deformazione (finita o infinitesima) che si inizi da $\bar{C}_\tau$ e non si riduca ad uno spostamento rigido. Ciò richiede, tra l'altro, come è ben noto, che $W(E)$ sia positivo per ogni determinazione delle componenti di E soggette alla condizione di incomprimibilità, non tutte nulle.

Secondo Signorini [16] si chiama *problema semplice* per l'equilibrio di un solido omogeneo isotropo perfettamente elastico il problema di determinare, in assenza di forze di massa, lo spostamento omogeneo per il quale le condizioni al

---

([2]) Stante la dipendenza W da C (od anche da $E = \frac{1}{2}(1 - C)$) la (2.3) si può anche scrivere $T = -p\mathbf{1} + F\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}C}F^T$.

contorno $(2.5)_1$ sono soddisfatte per una assegnata $\gamma = -p(\boldsymbol{F}^T)^{-1} + \boldsymbol{F}\,\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}$ che si riduca ad un tensore simmetrico (3).

Se si introducono gli *allungamenti principali* λ_H e si indicano con t_H le componenti principali di γ, tutto si riduce a trovare i tre λ_H e lo scalare p soddisfacenti alla *condizione*

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \tag{2.6}$$

mentre è

$$t_H = -\frac{p}{\lambda_H} + \frac{\partial W}{\partial \lambda_H} \tag{2.7}$$

se si pensa W espresso in funzione dei λ_H.

Conviene anche qui esprimere i tre allungamenti, legati da (2.6), mediante due soli parametri indipendenti [16]

$$s = \lambda_1 - \lambda_2 \qquad \lambda = \lambda_3 . \tag{2.8}$$

Si può sempre assumere $s \geqslant 0$. Con l'intervento di λ ed s, si ha

$$\begin{aligned} J_1 &= s^2 + \lambda^2 + 2\lambda^{-1} &&= s^2 + \frac{(\lambda-1)^2(\lambda+2)}{\lambda} + 3 \\ J_2 &= \lambda^2 s^2 + \lambda^{-2} + 2\lambda &&= \lambda^2 s^2 + \frac{(\lambda-1)^2(2\lambda+1)}{\lambda^2} + 3 \end{aligned} \tag{2.9}$$

mentre è anche (cfr. (2.7)) $\quad 3p = -\sum \lambda_H t_H + \sum \lambda_H \dfrac{\partial W}{\partial \lambda_H}$.

Signorini ha provato [16] che, una volta assegnate le t_H, il sistema delle equazioni di equilibrio è equivalente a due equazioni per λ ed s, in aggiunta ad una espressione esplicita di p.

3 - Trazione semplice

Il caso particolare che qui interessa è quello della trazione semplice. Nella configurazione di riferimento, il filo, non soggetto a forze ripartite, è teso tra

---

(3) La restrizione che, all'equilibrio, γ sia simmetrico è imposta dalla condizione che sia nullo il momento di tutte le forze esterne anche in $\bar{C}_\tau$.

due punti fissi, l è la sua lunghezza, ed è considerato limite di un solido sottile cilindrico, fissato agli estremi [4]. Per esso, in assenza di forze superficiali, è $t_1 = t_2 = t_{\perp} = 0$, $t_3 = t_{\parallel} = T > 0$, onde, nello schema dei problemi semplici, è

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} T &= 2(1-\lambda^{-3})(\lambda \frac{\partial W}{\partial J_1} + \frac{\partial W}{\partial J_2}) \\ 3p &= 2J_1 \frac{\partial W}{\partial J_1} + 4J_2 \frac{\partial W}{\partial J_2} - \lambda T = 6(\frac{\partial W}{\partial J_1}\lambda^{-1} + \frac{\partial W}{\partial J_2}(\lambda^{-2}+\lambda)) \end{aligned}$$

insieme alla condizione $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{\perp}$ ed a quella di incomprimibilità $\lambda\lambda_{\perp}^2 = 1$, mentre risulta $s = 0$.

4 - Approssimazioni successive

L'*equazione del moto*, in assenza di forze ripartite, è

$$(4.1)\qquad \rho \boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial s}(T\boldsymbol{t})$$

ove s è l'ascissa curvilinea istantanea, $\boldsymbol{t}$ il tensore tangente al filo nel punto di ascissa s, ρ la densità materiale. Se si introduce l'ascissa curvilinea σ nella configurazione naturale di riferimento, si ottiene

$$(4.2)\qquad \rho_* \boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial \sigma}(\frac{T}{\delta}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \sigma})$$

ove ρ_* la densità di riferimento, $\boldsymbol{u}$ lo spostamento e $\delta = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma}$ l'allungamento.

Penso $\boldsymbol{u}$ funzione analitica di un parametro ε, con la sola condizione che $\boldsymbol{u}$ si riduca a zero per $\varepsilon = 0$, e, com'è abituale, pongo per ogni funzione Φ di $\boldsymbol{u}$ $\overset{(n)}{\Phi} = (\dfrac{\mathrm{d}^n\Phi}{\mathrm{d}\varepsilon^n})_{\varepsilon=0}$.

Si derivi successivamente (4.2) rispetto ad ε, e si ponga nel risultato $\varepsilon = 0$. Direttamente $\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{\overset{(0)}{T}}{\overset{(0)}{\delta}} = 0$, $\dfrac{\overset{(0)}{T}}{\overset{(0)}{\delta}} = \text{cost.}$ mentre, direttamente da (4.1), risulta

[4] Qualche difficoltà si presenta per le condizioni agli estremi per la trave sottile.

$\overset{(0)}{T} = \text{cost}$. Posto, per semplicità, $\overset{(0)}{T} = \tau$, $\overset{(0)}{\delta} = \lambda$, per la prima approssimazione si ha

$$\rho_* \ddot{\boldsymbol{u}}^{(1)} = \frac{\tau}{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \boldsymbol{u}^{(1)}$$

onde la *frequenza della vibrazione fondamentale* è

$$\nu = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{\tau}{\rho_* \lambda}} \tag{4.3}$$

come è notissimo (v. Appendice 1).

5 - Solidi neo-hookeani, solidi di Mooney-Rivlin

Si ritorni ora ai risultati citati in 3. Nel caso di *filo neo-hookeano*, è $2W = C_2(J_1 - 3)$, $C_2 > 0$. Si ottiene perciò

$$\tau = (1 - \lambda^{-3}) \lambda C_2 \qquad \nu = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{C_2}{\rho_*} (1 - \lambda)^{-3}}. \tag{5.1}$$

Si vede immediatamente che, al tendere di λ all'infinito, ν tende alla *frequenza limite*

$$\nu_\infty = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{C_2}{\rho_*}} \tag{5.2}$$

in modo monotono.

Analogamente, nel *caso di Mooney e Rivlin*, essendo

$$2W = C_1 (J_2 - 3) + C_2 (J_1 - 3) \qquad C_1, C_2 > 0$$

mentre è $\tau = (1 - \lambda^{-3})(C_1 + C_2 \lambda)$ si ottiene

$$\nu = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{(1 - \lambda^{-3})}{\rho_*} (C_2 + \frac{C_1}{\lambda})}. \tag{5.3}$$

Quando λ tende all'infinito, ν tende ancora ad un limite finito, lo stesso del filo neo-hookeano, ma, come hanno fatto vedere Beatty e Chow, non in modo monotono. In effetti, ν raggiunge un valore massimo per un ben preciso valore λ^* di λ e poi, decrescendo, tende a ν_∞. Un andamento complesso, che sembra non del tutto soddisfacente dal punto di vista fisico. Comunque, nei due casi, la *reazione vincolare interna* è data da (cfr. (3.1))

$$p_1 = C_2 \lambda^{-1} \qquad p_2 = C_2 \lambda^{-1} + C_1 (\lambda + \lambda^{-2}). \tag{5.4}$$

Nello stato naturale è $p_0 = C_2$, $p_0 = 2C_1 + C_2$ rispettivamente, mentre per $\lambda \to \infty$, p_1 tende a zero, mentre p_2 tende all'infinito (v. Appendice 2).

6 - Solidi di Signorini

Come è stato detto in **1**, Signorini ha proposto, come potenziale isotermo per solidi incomprimibili, il potenziale

$$2W = C_1 (J_2 - 3) + C_2 (J_1 - 3) + C_3 (J_2 - 3)^2 \tag{6.1}$$

che si riduce al potenziale di Mooney e Rivlin quando sia $C_3 = 0$. Le condizioni cui devono sottostare le costanti materiali C_1, C_2, C_3 perché W possieda le prime proprietà caratteristiche di un potenziale elastico isotermo sono già state stabilite altrove [9]; ci si limita a ricordare le condizioni necessarie

$$C_3 > 0 \qquad C_1 + C_2 > 0 \qquad C_2 + 4C_3 > 0\,. \tag{6.2}$$

Facendo ricorso a (6.1) si ottiene (cfr. (3.1))

$$\nu = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{1 - \lambda^{-3}}{\rho_*} (C_2 + C_1 \lambda^{-1} + 2C_3 (1 - \lambda^{-1})^2 (2 + \lambda^{-1})} \tag{6.3}$$

la quale mostra, ancora una volta, che ν tende ad un limite finito ν_∞ quando λ tenda all'infinito. Precisamente si ha

$$\nu_\infty = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{C_2 + 4C_3}{\rho_*}} \tag{6.4}$$

e ν_∞ è reale (cfr. $(6.2)_3$).

L'Elasticità di secondo grado è caratterizzata dalla proprietà che le differenze tra le componenti principali degli sforzi sono funzioni di secondo grado delle componenti principali della deformazione inversa. Invece, in ricerche precedenti [15], Signorini aveva preferito l'ipotesi che la differenza tra le caratteristiche principali di tensione fosse una funzione di secondo grado delle componenti

Osservazione. Si è gia richiamata la scelta di W fatta da Rivlin, $2W = C_2(J_1 - 3) + \Psi(J_2 - 3)$. Le esperienze, fatte su intervalli limitati per la variazione di $J_1 - 3$ e $J_2 - 3$ sembrano indicare che $a)$ $\frac{\partial W}{\partial J_1}$ è costante; $b)$ $\frac{\partial W}{\partial J_2}$ è indipendente da J_1, positiva, decrescente al crescere di $J_2 - 3$. Tornando alla (3.1), si ha ora

$$T = (1 - \lambda^{-3})(\lambda C_2 + \Psi') \tag{8.3}$$

$$4l^2 \rho_* \nu^2 = (1 - \lambda^{-3})(C_2 + \frac{\Psi'}{\lambda}). \tag{8.4}$$

Se Ψ' è positiva e decrescente per ogni valore di λ, esiste finito il suo limite quanto $\lambda \to \infty$, e quindi è

$$4l^2 \rho_* \nu_\infty^2 = C_2 \tag{8.5}$$

come nel caso di Mooney-Rivlin o in quello dei solidi neo-hookeani. L'andamento della funzione $\nu^2(\lambda)$ dipende, com'è ovvio, dalla scelta di Ψ. Avendosi

$$G' = \frac{d}{d\lambda} 4l^2 \rho_* \nu^2 = \frac{1}{\lambda}(\frac{3C_2}{\lambda^3} + \frac{4\Psi'}{\lambda^4} - \frac{\Psi'}{\lambda} + \Psi''(1 - \frac{1}{\lambda^3}))$$

si vede che, se $C_2 > 0$ (come postulato da Rivlin e Sawyers) $G'(1)$ è positiva, mentre, per $\lambda \to \infty$, G' tende a divenire negativa (se Ψ'' è negativa per ogni valore del parametro). Segue, dunque, che ν^2, inizialmente crescente, possiede almeno un massimo e tende, poi, asintoticamente a ν_∞.

Appendice 1: Cenni storici

La (4.3) è usualmente attribuita a Brook Taylor (1685-1731) che fu il primo a fornire una soluzione dinamica del problema delle vibrazioni di un filo in una celebre memoria del 1713 (*De motu nervi tensi*, Phil. Trans. London 28 (1713), 26-32). Le ricerche sulle vibrazioni dei fili sono, naturalmente, ben più antiche. Si crede che il primo filosofo greco che si sia occupato dell'origine dei suoni sia stato Pitagora nel V secolo a.C.. Egli osservò che, di due fili di ugual natura, ma di lunghezza diversa, tesi tra due punti fissi, quello di lunghezza minore emette un suono più acuto, ed anzi, se la sua lunghezza è la metà di quella dell'altro filo, il suono è, come si dice, un'ottava superiore. Per trovare, però, uno studio razionale delle vibrazioni dei fili occorre giungere al sec. XVII. Il nome di Beeckman

(1570-1637) maestro di Descartes, si impone. Nel 1618, Beeckman riconobbe che le vibrazioni sonore sono isocrone, e cercò di dimostrare che la frequenza è inversamente proporzionale alla lunghezza del filo. Poiché Beeckman è stato il primo a tentare dimostrazioni matematiche di fenomeni fisici, ben a ragione può essere ritenuto il padre della teoria delle vibrazioni.

Galileo (1564-1642), nei Discorsi su due nuove scienze (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali* (1638)) si occupa della risonanza fra fili simili, sfruttando una certa analogia col pendolo, la frequenza isocrona delle cui oscillazioni dipende dalla lunghezza. Sembra evidente che Galileo avesse chiara l'idea che la frequenza dipende dalla lunghezza del filo, dalla sua tensione e densità.

Si ritiene che la prima pubblicazione corretta sulle vibrazioni dei fili sia quella del francescano P. Marin Mersenne (1588-1648) apparsa più o meno negli stessi anni degli scritti galileiani. Mersenne fu, soprattutto, un grande sperimentatore. Nel 1635 egli propose (*Harmonicorum libri*, Baudry, Paris (1639) e *Harmonie universelle*, Cramoisy, Paris (1636)), proprio in base a ricerche sperimentali, la legge ν proporzionale a $\frac{1}{l}\sqrt{\frac{T}{A}}$, A sezione trasversale. Si deve a Mersenne l'introduzione della denominazione *frequenza*.

Occorre anche citare le esperienze di Joseph Sauveur (1653-1713). Sauver stesso e Wallis (John Wallis (1616-1703)) provarono l'esistenza di nodi e ventri nelle vibrazioni stazionarie di un filo teso tra due punti, e stabilirono che le varie frequenze sono multiple intere della frequenza fondamentale. A Sauveur si deve l'introduzione delle denominazioni *armoniche* e *fondamentale* ancor oggi in uso. Egli anche osservò che un filo può emettere contemporaneamente i suoni corrispondenti alle varie armoniche.

Fu Daniele Bernoulli (1700-1782) a fornire la spiegazione dinamica del fenomeno nel 1732 (*Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae*, Comm. Acad. Sci. Petrop. **6** (1732-33), 108-122) giungendo a formulare il cosiddetto principio di sovrapposizione. Tale principio incontrò le critiche più decise di d'Alembert (1717-1783) e di Eulero (1707-1783) ai quali sembrava impossibile che una funzione potesse essere rappresentata in ogni caso dalla somma di funzioni sinusoidali. L'equazione delle vibrazioni di un filo, quale oggi scriviamo, è dovuta in definitiva a Lagrange (1736-1813) che la stabilì nel 1759 in una grossa memoria dell'Accademia delle Scienze di Torino (*Recherches sur la nature et la propagation du son*, Misc. Taurin. $\mathbf{1}_3$ (1759), 1-112), che pure non fu esente da critiche. Lagrange considera (secondo un modello già adottato in precedenza, ad es. da Huygens e Giovanni Bernoulli) una linea caricata da pesi uguali equidistanti e dimostra che per il sistema sono possibili vibrazioni con tante frequenze armoniche quanti sono i punti pesanti. Un passaggio al limite (e qui si concentrarono le critiche) conduce allo schema del filo continuo e dimostra l'esistenza di infinite armoniche.

Appendice 2: Potenziale elastico di materiali gommosi

La ricerca di una forma conveniente del potenziale isotermo per materiali gommosi in accordo coi dati sperimentali disponibili, anche se iniziata negli anni trenta [18], ha conosciuto un grande sviluppo negli anni della guerra ed in quelli immediatamente successivi anche a causa dei materiali sintetici che erano stati realizzati per esigenze belliche. Le ricerche più approfondite sono dovute a Rivlin e collaboratori. Poiché i materiali gommosi sono pressoché incomprimibili, il potenziale non può essere funzione che (della temperatura) di $J_1 - 3$ e $J_2 - 3$. Rivlin e Saunders [12], [13] hanno proposto un potenziale della forma $2W = C_2(J_1 - 3) + \Psi(J_2 - 3)$ con $C_2 > 0$ e Ψ funzione non decrescente del suo argomento, $\Psi(0) = 0$, e $\Psi'' \leq 0$. In essa rientra la forma più semplice, proposta da Mooney [10] che si ottiene per $\Psi = C_1(J_2 - 3)$, $C_1 > 0$. In base a questo risultato, Rivlin e Sawyers [14] hanno proposto la forma

$$2W = C_1(J_2 - 3) + C_2(J_1 - 3) + C_3(J_2 - 3)^2$$

con C_1 e C_2 positive, $C_3 < 0$. Si dimostra, però, che se si vuole che W sia positivo in tutto il dominio nel quale è definito, deve essere $C_3 > 0$. Poiché le esperienze di Rivlin e Saunders riguardano variazioni di J_1 tra 5 e 11, e di J_2 tra 5 e 30, sembra potersi concludere che la forma proposta non è che una approssimazione di una forma più generale. In effetti, si è pensato [7] ad uno sviluppo in serie di W nella forma $2W = \sum_{h,k} C_{hk}(J_1 - 3)^h (J_2 - 3)^k$ di cui la forma di Mooney e quella di Rivlin e Sawyers sono casi particolari. Non è chi non veda l'arbitrarietà di una tale posizione. Il problema è ancora aperto.

Bibliografia

[1] S. S. ANTMAN, *The equations for large vibrations of strings*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 259-270.

[2] M. F. BEATTY and A. C. CHOW, *On the transverse vibration of a rubber string*, J. Elasticity **13** (1983), 317-344.

[3] M. F. BEATTY and A. C. CHOW, *Free vibrations of a loaded rubber string*, Int. J. Non-Linear Mech. **19** (1984), 69-82.

[4] G. Capriz and P. Podio Guidugli, *Internal constraints*, in C. Truesdell's Rational Thermodynamics, Springer, Berlin 1984.

[5] G. Dinca, *Grandes déformations des fils élastiques*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22 (1968), 41-65.

[6] S. Forte, *Sulla termomeccanica dei fili*, Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1982), 1-17.

[7] D. W. Haines and W. D. Wilson, *Strain-energy density function for rubber-like materials*, J. Mech. Phys. Solids 27 (1979), 345-360.

[8] Li Ta-Tsien, D. Serre and Zhang Hao, *The generalized Riemann problem for the motion of elastic strings*, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), 1189-1203.

[9] T. Manacorda, *Sul potenziale isotermo nella più generale Elasticità di secondo grado per solidi incomprimibili*, Ann. Mat. Pura Appl. 41 (1955), 1-10.

[10] M. Mooney, *A theory of large elastic deformation*, J. Appl. Phys. **11** (1940), 582-592.

[11] J. W. S. Rayleigh, *Theory of sounds*, Dover Publ., Mineola, N. Y. 1945.

[12] V. R. S. Rivlin and D. W. Saunders, *Experiments on the deformation of rubber*, Phil. Trans. Roy. Soc. London A 243 (1951), 251-288.

[13] V. R. S. Rivlin and D. W. Saunders, *The free energy of deformation for vulcanized rubber*, Trans. Faraday Soc. 48 (1952), 200-206.

[14] V. R. S. Rivlin and K. N. Sawyers, *The strain-energy function for elastomers*, Trans. Soc. Rheology **20** (1976), 545-557.

[15] A. Signorini, *Sulle deformazioni termoelastiche finite*, Verh. des Kongr. für Technische Mechanik, Stoccolma (1930), 80-89.

[16] A. Signorini, *Trasformazioni termoelastiche finite*, 3, Ann. Mat. Pura Appl. 39 (1955), 147-201.

[17] R. J. Tait and D. B. Duncan, *Motion of a mass on a non-linear elastic string*, Int. J. Non-Linear Mech. 27 (1992), 139-148.

[18] L. R. G. Treloar, *The physics of rubber-elasticity*, Clarendon Press, Oxford 1958.

[19] C. Truesdell, *The rational mechanics of flexible or elastic bodies*, Introd. a Leonhardi Euleri Opera Omnia, vol. X et XI seriei secundae, Turici 1960.

Summary

Experimental results prove that the fundamental frequency of the transverse vibrations of an elastic string with fixed ends is a function of the tension which approaches a finite limit as the tension tends to the infinity. The Mooney-Rivlin's constitutive law for the tension as a function of the stretch is, in this sense, adequate, but the frequency does not tend to the limit monotonically increasing, but rather it attains a maximum value for a finite value of the stretch, thereafter tending to the limit monotonically decreasing. A constitutive law proposed by Signorini is more satisfactory. In fact, if the values of the coefficients are conveniently restricted in the range which assure that the elastic potential is positive definite, the frequency will tend to a finite limit in a monotonical way.

* * *