Riv. Mat. Univ. Parma (5) 2 (1993), 171-177

MARIO SERVI (*)

Equazioni caratteristiche per la commutatività (**)

A Bianca Manfredi con amicizia e stima

Introduzione

Siano g, f, φ tre operazioni sui naturali, rispettivamente unaria, binaria e ternaria. Ora e nel seguito, supporremo che esse soddisfino le equazioni della ricursione primitiva

$$f(x, 0) = g(x) \tag{1}$$

$$f(x, y + 1) = \varphi(x, y, f(x, y)). \tag{2}$$

In [3] sono state introdotte due equazioni concernenti φ, g, la cui soddisfazione costituisce una condizione sufficiente perché f risulti commutativa. Nel presente lavoro si individua un insieme di equazioni la cui soddisfazione costituisce condizione necessaria e sufficiente per la commutatività di f.

Nell'ultimo paragrafo si dimostra che alcuni dei risultati ottenuti non valgono nei modelli non standard dell'aritmetica.

1 - Le nuove equazioni su φ e g

Cominciamo col riportare le equazioni fornite in [3]:

$$g(x + 1) = \varphi(0, x, g(x)) \tag{3}$$

$$\varphi(x + 1, y, \varphi(y, x, z)) = \varphi(y + 1, x, \varphi(x, y, z)). \tag{4}$$

(*) Dip. di Matem., Univ. Parma, Via D'Azeglio 85, 43100 Parma, Italia.
(**) Ricevuto il 15.7.1993. Classificazione AMS 03 B 99.

Chiaramente la (3) equivale a $f(x+1, 0) = f(0, x+1)$, per cui essa è conseguenza della commutatività di f. Una facile verifica mostra invece come f possa essere commutativa, senza che valga la (4).

Come è noto, mentre le (1), (2) assicurano che f è determinata da g e da φ (teorema di ricursione primitiva, **RP**), la f determina g ma non φ, giacchè nella (2) come terzo argomento di φ compaiono solo elementi dell'immagine di f. Grazie a questa osservazione, è facile ottenere una f commutativa mediante **RP** da g, φ che non soddisfino la (4): basta prendere $f(x, y)$ costante di valore 0 e definire φ come segue

$$\varphi(x, y, z) = \begin{matrix} 0 & \text{se } z = 0, \\ y & \text{altrimenti.} \end{matrix}$$

Ovviamente valgono (1) e (2) (se $g(x) \equiv 0$), ma non vale la (4).

Adesso introduciamo una successione $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ di termini[1] che coinvolgono le funzioni φ, g e la sola variabile individuale x:

$$t_0(x) = g(x) \tag{5}$$

$$t_{n+1}(x) = \varphi(x, n, t_n(x)). \tag{6}$$

Sia $\Sigma = \{E_n : n \in N\}$, dove E_n è l'equazione

$$t_n(x+1) = \varphi(n, x, t_n(x)). \tag{7}$$

In che rapporto stanno le equazioni di Σ con le equazioni (3) e (4) introdotte in [3]? Si ha

Proposizione 1. *Delle equazioni* (3) *e* (4) *sono conseguenza tutte le equazioni in* Σ.

Dimostrazione. L'equazione E_0 altro non è che la (3), in virtù di (5). Procediamo dunque per induzione, supponendo che valga E_n e cioè la (7). Si ha:

$$t_{n+1}(x+1) = \varphi(x+1, n, t_n(x+1)) = \varphi(x+1, n, \varphi(n, x, t_n(x)))$$

per (6) e (7). D'altra parte si ha $\varphi(n+1, x, t_{n+1}(x)) = \varphi(n+1, x, \varphi(x, n, t_n(x)))$,

(1) Per non appesantire inutilmente la trattazione, parliamo liberamente di «termini», senza tuttavia distinguere fra i simboli del linguaggio oggetto e le operazioni che li interpretano nel modello standard N.

sempre per la (6). Usando la (4), con $z = t_n(x)$ si ha allora

$$t_{n+1}(x+1) = \varphi(n+1, x, t_{n+1}(x))$$

cioè la E_{n+1}. L'asserto segue, appunto, per induzione su n.

2 - Caratterizzazione della commutatività

Si osservi che l'inverso della proposizione precedente non vale, come si evince, usando i risultati precedenti, dal seguente

Teorema 1. *Condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione f sia commutativa è che le funzioni g e φ soddisfino tutte le equazioni di Σ, definite dalla* (7).

Prima di dimostrare il teorema, osserviamo che

Lemma 1. *Per ogni $n \in N$ vale l'equazione $t_n(x) = f(x, n)$.*

Dimostrazione. Per induzione su n. Dalla (1), si ha $t_0(x) = g(x) = f(x, 0)$. Inoltre per la (2)

$$t_{n+1}(x) = \varphi(x, n, t_n(x)) = \varphi(x, n, f(x, n)) = f(x, n+1).$$

Dimostriamo adesso che la *condizione enunciata nel teorema è necessaria.* Valgano dunque (1) e (2) con f commutativa, e dimostriamo che vale ogni $E_n \in \Sigma$. Usando il Lemma 1 e la commutatività di f si ha

$$t_n(x+1) = f(x+1, n) = f(n, x+1)$$

$$= \varphi(n, x, f(n, x, f(n, x))) = \varphi(n, x, f(x, n)) = \varphi(n, x, t_n(x)).$$

Per dimostrare che la condizione è sufficiente, premettiamo il seguente

Lemma 2. *Dalla E_0 segue*

$$f(x, 0) = f(0, x) \qquad \text{per ogni } x. \tag{8}$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su x. Per $x = 0$, la (8) è banale. Valga dunque la (8) per un certo x e dimostriamola per $x + 1$. Usando E_0 si ha: $f(x+1, 0) = t_0(x+1) = \varphi(0, x, t_0(x)) = \varphi(0, x, f(x, 0))$. Usando l'ipotesi induttiva (8), si ha poi: $f(0, x + 1) = \varphi(0, x, f(0, x)) = \varphi(0, x, f(x, 0))$. La conclusione segue dal confronto fra le uguaglianze provate.

Corollario. *La condizione del teorema è sufficiente; supposto, cioè, che valgano le Σ, si ha che in f ogni n è permutabile con ogni x.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n. Per $n = 0$, l'asserto si riduce al Lemma 2. Supponiamo dunque che un certo n sia permutabile con ogni x e dimostriamo lo stesso risultato per $n + 1$. Per $x = 0$, si ricade nel lemma; sia dunque $n + 1$ permutabile con x e dimostriamo che esso è permutabile con $x + 1$: $f(x, +1, n + 1) = t_{n+1}(x + 1) = \varphi(n + 1, x, t_{n+1}(x))$, per E_{n+1}. D'altra parte, usando l'ipotesi induttiva si ha:

$$f(n + 1, x + 1) = \varphi(n + 1, x, f(n + 1, x)) = \varphi(n + 1, x, f(x, n + 1))$$

e il teorema resta così dimostrato, se si tiene conto del Lemma 1.

3 - Considerazioni sui modelli non standard

Finora abbiamo supposto che g, f, φ fossero operazioni definite sul modello standard, $\boldsymbol{N}$, dell'aritmetica. Nel presente paragrafo vogliamo vedere quanti dei precedenti risultati continuino a sussistere, quando ci si riferisca ad operazioni su un modello non standard $\boldsymbol{N}^*$.

Cominciamo col ricordare che nei modelli non standard non vale il teorema di **RP**, come precisato dai seguenti due teoremi

Teorema 2. *Le equazioni* (1), (2) *della ricursione primitiva non determinano f in funzione di g e φ.*

Dimostrazione. Siano g, φ le funzioni che si usano di solito per definire la somma per **RP**:

$$g(x) = x \qquad \varphi(x, y, z) = z + 1 .$$

È ovvio che se f è la somma di $\boldsymbol{N}^*$, essa soddisfa le (1), (2). Ma esistono altre funzioni con la stessa proprietà. Ad esempio, definiamo f: $\boldsymbol{N}^* \times \boldsymbol{N}^* \to \boldsymbol{N}^*$ come segue:

$$f(x, y) = \begin{matrix} x + y & \text{se uno dei due argomenti è finito} \\ y & \text{se entrambi gli argomenti sono infiniti.} \end{matrix}$$

Notando che 0 è finito e che $y+1$ è finito se e solo se y lo è, si ha che le (1), (2) sono soddisfatte.

Per poter enunciare i risultati successivi, ricordiamo alcune ben note proprietà dei modelli non standard. Denotiamo con $\equiv$ l'equivalenza su N^* definita da

$$x \equiv y \ sse |x - y| \in \boldsymbol{N}.$$

È noto che $[0] = \boldsymbol{N}$ e che per ogni x infinito, $[x]$ è isomorfa a $\boldsymbol{Z}$ (per quanto concerne l'ordine).

Da ogni classe di equivalenza $[x]$ scegliamo un elemento $\alpha_x \in [x]$ e supponiamo di aver scelto $\alpha_0 = 0$.

Lemma 3. *Sia* φ: $N^* \times N^* \times N^* \to N^*$ *definita da*

$$\varphi(x, y, z) = \begin{matrix} z - 1 & \text{se } z < \alpha_z \\ z + 1 & \text{se } z \geqslant \alpha_z . \end{matrix} \tag{9}$$

Allora nessun elemento della forma α_z *appartiene all'immagine di* φ.

Dimostrazione. Si osservi anzitutto che la φ è ben definita, perché se z è standard, il caso $z < \alpha_z$ non si presenta, essendo $\alpha_z = 0$. Inoltre si ha

$$z \equiv \varphi(x, y, z) \qquad x, y, z \in N^* . \tag{10}$$

Per assurdo, supponiamo ora che $\varphi(u, v, w) = \alpha_z$. Dalla (10) si ha allora $w \equiv \alpha_z$ e quindi $\alpha_w = \alpha_z$. Se $w < \alpha_w$ si ha $w < \alpha_w = \alpha_z = \varphi(u, v, w) = w - 1$, che è assurdo. Se invece $w \geqslant \alpha_w$ si ha $w \geqslant \alpha_w = \alpha_z = \varphi(u, v, w) = w + 1$ e anche questo è impossibile.

Lemma 4. *Sia* φ *definita come nel Lemma* 3 *ed* f: $N^* \times N^* \to N^*$ *una funzione soddisfacente le* (2). *Allora esistono* $x, y, b \in N^*$ *con* y *infinito tali che* $f(x, y) = \alpha_b$.

Dimostrazione. Sia x qualunque e fissiamo y infinito arbitrario. Posto $b = f(x, y)$, sia $n = |b - \alpha_b| \in \boldsymbol{N}$. Essendo infinito anche $y - n$, l'asserto resta dimostrato se proviamo che

$$f(x, y - n) = \alpha_b . \tag{11}$$

Per ricavare la (11), distinguiamo ora due casi

(i) $b \geqslant \alpha_b$; allora

$$f(x, y - i) = \alpha_b + n - i \qquad 0 \leqslant i \leqslant n. \tag{12}$$

(ii) $b < \alpha_b$; in tal caso

$$f(x, y - i) = \alpha_b - n + i \qquad 0 \leqslant i \leqslant n. \tag{13}$$

In entrambi i casi, la (11) si ottiene per $i = n$.

Dimostriamo dunque la (12), procedendo per induzione su i. Essendo $b \geqslant \alpha_b$, si ha $b = \alpha_b + n$, ovvero $f(x, y) = \alpha_b + n$, e questa fornisce la base dell'induzione. Valga dunque la (12) con $i < n$ e dimostriamo la

$$f(x, y - i - 1) = \alpha_b + n - i - 1. \tag{14}$$

Si ha: $\alpha_b + (n - i) = f(x, y - i) = f(x, y - i - 1 + 1) = \varphi(x, d, c)$, dove abbiamo posto $d = y - i - 1$ e $c = f(x, d)$. Per la (10) è dunque $\alpha_b + (n - i) \equiv c$, da cui $\alpha_b = \alpha_c$. Se fosse $c < \alpha_c$ allora si avrebbe

$$c < \alpha_c = \alpha_b + (n - i) = \varphi(x, d, c) = c - 1$$

che è assurdo; dunque è $c \geqslant \alpha_c$. Ne segue che $\alpha_b + n - i = \varphi(x, d, c) = c + 1$, da cui $f(x, d) = c + n - i - 1$, cioè la (14).

La (13) si dimostra in modo del tutto analogo.

Teorema 3. *Non sempre esiste una* $f\colon N^* \times N^* \to N^*$ *soddisfacente la* (2).

Dimostrazione. Sia φ definita come nel Lemma 3 e, per assurdo, sia f una funzione soddisfacente la (2). Sia $f(x, y) = \alpha_b$ con $y > 0$, secondo il Lemma 4. Allora $\alpha_b = f(x, y) = f(x, (y - 1) + 1) = \varphi(x, y - 1, f(x, y - 1))$, contro il Lemma 3.

Concludiamo il lavoro col seguente teorema, che riassume quali dei risultati precedenti continuino a valere quando si spostino le considerazioni svolte nell'ambito dei modelli non standard.

Teorema 4. *Siano* $f\colon N^* \times N^* \to N^*$, $g\colon N^* \to N^*$ *e* $\varphi\colon N^* \times N^* \times N^* \to N^*$ *soddisfacenti* (1) *e* (2). *Sia ha:*

(i) *Se valgono le equazioni* (3) *e* (4), *allora valgono le equazioni* (7)

(ii) *Se* f *è commutativa, valgono le* (7)

(iii) *Le equazioni* (3), (4) non *implicano la commutatività di* f.

(iv) *La* f *può essere commutativa, senza che valga la* (4). *Di conseguenza, le* (7) non *implicano la* (4).

Dimostrazione. (i) La dimostrazione della Proposizione 1 continua a valere per funzioni definite su tutto N^*.

(ii) Il Lemma 1 e la validità delle equazioni in Σ sussistono anche per funzioni non standard.

(iii) Siano g, φ, definite come nella dimostrazione del Teorema 2. La seconda funzione f ivi considerata non è commutativa, sebbene g, φ soddisfino le (3), (4).

(iv) Si riveda il controesempio all'inizio del numero **1** e lo si adatti ad N^*.

Bibliografia

[1] J. D. Monk, *Mathematical logic*, Springer, Berlin 1976.

[2] A. Robinson, *Non-standard analysis*, North-Holland, Amsterdam 1965.

[3] M. Servi, *Osservazioni sul teorema di ricorsione primitiva*, Omaggio a Ludovico Geymonat, Muzzio, Padova 1992.

Summary

Let f *be a binary operation on the positive integers obtained by primitive recursion from* g *and* φ; *in a preceeding work (see* [3]*) we gave a sufficient condition on* g *and* φ *for* f *to be commutative. Here, after disproving the necessity of that condition, we give a set of equations on the defining functions whose satisfaction is both necessary and sufficient for the commutativity of the function to be defined.*

* * *