Riv. Mat. Univ. Parma (5) 2 (1993), 195-203

G. FERRARESE e M. RICCI (*)

Sulle deformazioni elastiche finite di una crosta sferica incomprimibile, omogenea ed isotropa (**)

A Bianca Manfredi con amicizia e stima

Premesse

In questa nota, senza alcuna preventiva limitazione sull'ampiezza della trasformazione, viene trattato, in modo completo, il problema della deformazione isoterma di una *crosta sferica incomprimibile, omogenea ed isotropa,* per la quale manchino le forze di massa e le forze in superficie si riducano, internamente ed esternamente, a *pressioni uniformi* prefissate.

Per la forma del potenziale isotermo è stata adottata quella proposta da Mooney e adoperata da Rivlin in molte sue ricerche; essa sembra in buono accordo con l'esperienza.

Semplici considerazioni di simmetria portano a ritenere che, nelle condizioni presupposte, la trasformazione sia puramente radiale. Di guisa che l'uso della condizione di incomprimibilità, insieme a quello delle equazioni indefinite di Cauchy, permette di determinare esplicitamente le caratteristiche principali di tensione e insieme consente di accertare che, *ad ogni assegnato valore delle pressioni interna ed esterna, corrisponde uno ed un solo stato di deformazione, con una ben precisa distribuzione delle tensioni interne*

Per quanto riguarda le notazioni si rinvia alle memorie di Signorini [2], [3], [5], specialmente alla terza, anche per quanto concerne la teoria dei solidi incomprimibili.

(*) Dip. di Matem. G. Calstelnuovo, Univ. Roma La Sapienza, Piazzale A. Moro 2, 00185 Roma, Italia.

(**) Ricevuto il 20.9.1993. Classificazione AMS 73 G 05.

1 - Posizione del problema

Prendiamo in considerazione un *sistema perfettamente elastico* G soggetto al vincolo d'incomprimibilità a temperatura costante, indicando con $\bar{C}_\tau$ un suo stato di *equilibrio spontaneo stabile* alla temperatura uniforme τ, con C lo stato attuale. In quel che segue, penseremo assunto come *stato di riferimento* C_* un $\bar{C}_\tau$ e intenderemo che in esso il solido G sia omogeneo ed isotropo.

Ciò posto, supponiamo che in $C_* = \bar{C}_\tau$ il sistema elastico si presenti come una *crosta sferica* di raggi interno ed esterno rispettivamente a e b $(a < b)$, ed assumiamo come origine della terna di riferimento $\mathscr{C} = O,\ y_1,\ y_2,\ y_3$ il comune centro delle due sfere, che costituiscono lo strato, e orientamento qualsiasi, ma fissato una volta per tutte.

Conviene riferire i punti del solido a coordinate polari r, ϑ e φ di polo O, ponendo quindi, con le usuali notazioni

$$\begin{array}{lll} y_1 = r\cos\vartheta\sin\varphi & y_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi & y_3 = r\cos\varphi \\ r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} & -\pi < \vartheta \leqslant \pi & 0 < \varphi \leqslant \pi\,. \end{array} \tag{1}$$

Ci proponiamo di specializzare lo spostamento $C_* \to C$ in modo che C dia una configurazione di *equilibrio forzato* rispetto a sollecitazioni agenti sulle due superficie σ_1, σ_2, che limitano lo strato, e aventi il carattere di pressioni uniformi:

$$\boldsymbol{F} = 0 \quad \text{in } C \qquad \boldsymbol{f} = p_i \boldsymbol{n} \quad \text{su } \sigma_i \qquad i = 1, 2\,.$$

Naturalmente $\boldsymbol{F}$ ed $\boldsymbol{f}$ ripettivamente, sono i vettori caratteristici delle forze di massa e superficiali, $\boldsymbol{n}$ il versore della normale interna, p_i, con $p_1 < p_2$, due costanti positive.

In queste condizioni, lo spostamento diretto $C_* \to C$ si può senz'altro intendere puramente radiale e quindi definito dall'uguaglianza vettoriale

$$OP = f(r)\ \operatorname{grad} r\,. \tag{2}$$

Al tempo stesso, la condizione di regolarità per lo spostamento: $I_{3\alpha} > 0$, se con α si indica l'omografia di trasformazione $(\mathrm{d}P = \alpha\,\mathrm{d}P_*)$, si traduce in

$$f(r) \neq 0 \qquad f'(r) > 0 \tag{3}$$

in modo che l'incognita funzione $f(r)$ resta vincolata dalla condizione di essere sempre crescente, senza poter cambiare di segno.

In base alla (2), il solido si presenta, anche in C, come una crosta sferica con lo stesso centro O, ma raggi interno ed esterno rispettivamente a', b' $(a' < b')$;

si potrà dimostrare, senza alcuna incertezza che, qualunque sia lo spessore della crosta sferica, prefissati a piacere $p_1 > 0$ e $p_2 > 0$, con $p_1 < p_2$, il problema proposto ammette una ed una sola soluzione.

2 - Prime conseguenze della condizione di incomprimibilità

Alla (2) si accompagna l'espressione

$$ds^2 = f'^2 \, dr^2 + f^2 \sin^2\varphi \, d\vartheta^2 + f^2 \, d\varphi^2$$

del quadrato dell'elemento lineare di C. Questo vuol dire:

1 - in corrispondenza al punto generico P_* dello stato di riferimento, sono *direzioni principali* di deformazione quella radiale e ogni altra direzione a questa normale; cioè l'ellissoide di deformazione è rotondo ed ha per asse quello del raggio vettore.

2 - gli allungamenti principali Δ', Δ, rispettivamente nella direzione del raggio e di ogni altra direzione a questa normale, non differiscono da

$$(2)' \qquad \Delta' = f'(r) - 1 \qquad \Delta = \frac{f(r)}{r} - 1 \, .$$

Dovendosi intendere, d'altra parte, $1 + \Delta' > 0$, $1 + \Delta > 0$, le (3) vengono precisate in

$$(3)' \qquad f(r) > 0 \qquad f'(r) > 0$$

e quindi *lo spostamento* $C_* \to C$ *è strettamente irrotazionale* ([2], 61-62).

La condizione di incomprimibilità resta dunque tradotta da

$$(4) \qquad f'(r) \frac{f^2(r)}{r^2} = 1 \quad \text{che implica} \quad f(r) = (r^3 + K)^{\frac{1}{3}}$$

essendo K una costante d'integrazione.

La $(3)'_1$ impone, a sua volta, la condizione

$$(3)'' \qquad r^3 + K > 0 \quad \text{cioè} \quad K > -a^3 \, ,$$

e la $(4)_2$ precisa il significato di K

$$(5) \qquad K = a'^3 - a^3 = b'^3 - b^3 \, ,$$

mentre la $(3)'_2$ è automaticamente soddisfatta.

3 - Caratteristiche di tensione, equazioni di Cauchy

L'omogeneità e l'isotropia, presupposte in C_*, portano a dire non solo che lo stato di riferimento è esente da stress, ma che le immagini su C delle direzioni principali di deformazione sono direzioni principali di tensione; cioè che, per il generico punto P di C, è terna principale di tensione una qualunque delle ∞^1 terne trirettangole, di origine P, aventi uno degli assi diretto secondo il raggio vettore.

Indicando perciò con B', B i *coefficienti principali della omografia dello stress*, rispettivamente nella direzione radiale e in ogni direzione a questa normale, deve essere

$$p_i = B' \qquad i = 1, 2 \tag{6}$$

in ogni punto di σ_i.

Facciamo ora intervenire lo *spostamento inverso* $C \to C_*$, indicando con $\bar{E}_r\,(r = 1, 2, 3)$ le caratteristiche principali di deformazione che ad esso corrispondono.

Per fissare le idee, supporremo, per il *potenziale elastico*, l'espressione [1]

$$2\bar{W}_\tau = c_1^{(\tau)}(\bar{I}_1 - 3) + c_2^{(\tau)}(\bar{I}_2 - 3)$$

essendo $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ i primi due *invarianti* della omografia $1 + 2\bar{E}$ e $c_1^{(\tau)}$, $c_2^{(\tau)}$ due costanti positive, caratteristiche del materiale; per le caratteristiche dello stress in C valgono allora i *legami costitutivi*:

$$B_r - \bar{P} = 2\Big(\frac{\partial \bar{W}_\tau}{\partial \bar{I}_1}(1 + 2\bar{E}_r) - \frac{\partial \bar{W}_\tau}{\partial \bar{I}_2}(1 + 2\bar{E}_{r+1})(1 + 2\bar{E}_{r+2})\Big)$$

$$\bar{P} = p - 2\frac{\partial \bar{W}_\tau}{\partial \bar{I}_1}\bar{I}_1 \qquad r = 1, 2, 3$$

essendo p lo scalare che caratterizza le reazioni vincolari subite dai singoli elementi del solido, per effetto del vincolo d'incomprimibilità. Pertanto, risulta in definitiva

$$\begin{aligned} B' - \bar{P} &= c_1(1 + 2\bar{E}') - c_2(1 + 2\bar{E})^2 \\ B - \bar{P} &= c_1(1 + 2\bar{E}) - c_2(1 + 2\bar{E})(1 + 2\bar{E}') \\ \bar{P} &= p - c_1((1 + 2\bar{E}') + 2(1 + 2\bar{E})) \end{aligned} \tag{7}$$

ove, per brevità, si è scritto c_i in luogo di $c_i^{(\tau)}$.

Dalla $(7)_3$, eliminando $\bar{P}$, si deduce facilmente

$$(7)' \qquad \begin{aligned} B' - p &= -(1+2\bar{E})(2c_1 + c_2(1+2\bar{E})) \\ B - p &= -(c_1((1+2\bar{E}) + (1+2\bar{E}')) + c_2(1+2\bar{E})(1+2\bar{E}')) \end{aligned}$$

in modo che *la differenza $B' - p$ viene a dipendere dalla sola $\bar{E}$.*

D'altra parte, sussistono le uguaglianze

$$1 + 2\bar{E}' = \frac{1}{(1+\Delta')^2} \qquad\qquad 1 + 2\bar{E} = \frac{1}{(1+\Delta)^2}$$

onde le $(2)'$ portano a scrivere

$$(7)'' \qquad \begin{aligned} B' - p &= -\frac{r^2}{f^2}(2c_1 + c_2\frac{r^2}{f^2}) \\ B - p &= -c_1(\frac{r^2}{f^2} + \frac{1}{(f')^2}) - c_2\frac{r^2}{f^2(f')^2}\,. \end{aligned}$$

Per quanto poi riguarda le equazioni indefinite di Cauchy, esse si riducono all'unica

$$(8) \qquad r'\frac{dB'}{dr'} = 2(B - B')$$

in quanto le altre due precisano che per B vi può essere dipendenza solo da $r' = f(r)$.

È chiaro che lo stesso deve verificarsi anche per B'; per convincersene, basta osservare che la (8) si può porre nella forma

$$\frac{d((r')^2 B')}{dr'} = 2r'B$$

e che il secondo membro non dipende ormai nè da ϑ nè da φ.

Stanti le $(7)''$, la (8) non differisce ormai da

$$\frac{dp}{dr} = 4c_1\frac{r}{f^2} - 2c_1\frac{f'}{f}(\frac{r^2}{f^2} + \frac{1}{(f')^2}) + 2c_2\frac{r^3}{f^4}(2 - \frac{r}{f}f') - 2c_2\frac{r^2}{f^3 f'}$$

ovvero, per la (4)

$$\frac{dp}{dr} = -2\frac{r^2}{f^3}(c_1(\frac{r}{f} - \frac{f^2}{r^2})^2 + c_2(\frac{f}{r} - \frac{r^2}{f^2})^2)\,.$$

Di qui, tenuto conto della $(4)_2$, si ha in definitiva

$$\frac{dp}{dr} = -2\frac{K^2}{f^5}\left(\frac{c_1}{r^2} + \frac{c_2}{f^2}\right) \qquad f \equiv (K + r^3)^{\frac{1}{3}} . \tag{9}$$

4 - Risoluzione del problema

Per l'integrazione della (9), conviene fare un cambiamento della variabile indipendente r, ponendo $\xi = r^{-3}$. L'equazione diventa allora

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{2}{3}K^2\xi(1+K\xi)^{-\frac{5}{3}}(c_1 + c_2(1+K\xi)^{-\frac{2}{3}})$$

e porge quindi, con facile quadratura

$$p = p_0 + (1+K\xi)^{-\frac{2}{3}}(c_1(3+2K\xi) - \frac{1}{2}c_2(3+4K\xi)(1+K\xi)^{-\frac{2}{3}}) \tag{9$'$}$$

essendo p_0 una costante arbitraria.

Le $(7)''$ non differiscono pertanto da

$$\begin{aligned} B' &= P_0 + (1+K\xi)^{-\frac{2}{3}}(c_1(1+2K\xi) - \frac{1}{2}c_2(5+4K\xi)(1+K\xi)^{-\frac{2}{3}}) \\ B &= P_0 + (1+K\xi)^{-\frac{2}{3}}(c_1(1-K^2\xi^2) - \frac{1}{2}c_2(5+8K\xi+2K^2\xi^2)(1+K\xi)^{-\frac{2}{3}}) . \end{aligned} \tag{10}$$

Posto

$$\xi_1 = \frac{1}{a^3} \qquad \xi_2 = \frac{1}{b^3} \qquad 0 < \xi_2 < \xi_1 \tag{11}$$

la $(10)_1$ precisa le condizioni al contorno (6) in

$$p_i = p_0 + (1+K\xi_i)^{-\frac{2}{3}}(c_1(1+2K\xi_i) - \frac{1}{2}c_2(5+4K\xi_i)(1+K\xi_i)^{-\frac{2}{3}}) \qquad i = 1, 2$$

ovvero anche

$$\begin{aligned} p_i &= p_0 + 2c_1(1+K\xi_i)^{\frac{1}{3}} - c_1(1+K\xi_i)^{-\frac{2}{3}} \\ &\quad -2c_2(1+K\xi_i)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}c_2(1+K\xi_i)^{-\frac{4}{3}} \qquad i = 1, 2 . \end{aligned} \tag{6$'$}$$

Le (6)' sono due equazioni per la determinazione delle costanti K e p_0, di cui la prima maggiore di $-\frac{1}{\xi_1}$, uniche incognite del problema; esse non sono facilmente risolubili, ma è spontaneo chiedersi se, o almeno sotto quali condizioni, le (6)' garantiscono l'unicità della soluzione.

5 - Sulla unicità

Consideriamo la funzione

$$(12)\qquad y(\xi)=2c_1(1+K\xi)^{\frac{1}{3}}-c_1(1+K\xi)^{-\frac{2}{3}}-2c_2(1+K\xi)^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}c_2(1+K\xi)^{-\frac{4}{3}}$$

essendo $\xi>0$ e K un parametro arbitrario; dalla espressione della sua derivata

$$(12)'\qquad y'(\xi)=\frac{2}{3}K(1+K\xi)^{-\frac{5}{3}}(2+K\xi)(c_1+c_2(1+K\xi)^{-\frac{2}{3}}),$$

si riconosce a vista che, per ogni fissato $K\neq 0$, almeno per $\xi>-\frac{1}{K}$, essa si deve intendere crescente o descrescente, a seconda che risulti $K\gtrless 0$ (per $K=0$ si ha $y(\xi)=$ costante).

Ciò mette in evidenza che, per ogni fissato valore di ξ_1, ξ_2 ($\xi_1>\xi_2>0$), *la funzione* di K: $g(K)=y(\xi_1)-y(\xi_2)$, $g(K)\gtrless 0$ per $K\gtrless 0$, *passa con continuità, nell'intervallo* $(-\frac{1}{\xi_1},\ \infty)$, *da* $-\infty$ *a* $+\infty$ (1), cioè l'equazione per la determinazione di K

$$(13)\qquad p_1-p_2=g(K)$$

ammette *sempre*, qualunque siano le costanti (qui positive) p_1, p_2, *almeno una soluzione* per K.

Precisamente si avrà $K>0$ oppure $-\frac{1}{\xi_1}<K<0$, a seconda che la quantità a primo membro risulti maggiore o minore di zero, valendo $K=0$ *se, e solo se, risulta* $p_1=p_2$.

Possiamo quindi escludere, almeno per quel che ci interessa, la possibilità di valori positivi per K, limitandoci a supporre $-\frac{1}{\xi_1}<K\leqslant 0$.

Alla (12)' si accompagna, per la derivata della y rispetto a K, l'espres-

---

(1) Si ha evidentemente $\lim\limits_{k\to-\frac{1}{\xi_1}} g(k)=-\infty$, $\lim\limits_{k\to+\infty} g(k)=+\infty$.

sione

$$z(\xi) = \frac{2}{3}\xi(c_1(1+K\xi)^{-\frac{2}{3}} + c_1(1+K\xi)^{-\frac{5}{3}} + c_2(1+K\xi)^{-\frac{4}{3}} + c_2(1+K\xi)^{-\frac{7}{3}})$$

$$= \frac{2}{3}\xi(1+K\xi)^{-\frac{5}{3}}(2+K\xi)(c_1 + c_2(1+K\xi)^{-\frac{2}{3}}) > 0$$

insieme a

$$\begin{aligned} z'(\xi) &= \frac{2}{3}(1+K\xi)^{-\frac{2}{3}}(1+(1+K\xi)^{-1})(c_1 + c_2(1+K\xi)^{-\frac{2}{3}}) \\ &- \frac{2}{9}K\xi(1+K\xi)^{-\frac{5}{3}}(2c_1 + 5c_1(1+K\xi)^{-1} + 4c_2(1+K\xi)^{-\frac{2}{3}} + 7c_2(1+K\xi)^{-\frac{5}{3}}). \end{aligned} \tag{14}$$

Dalla (14) si vede allora bene che, se $K \leq 0$, il secondo membro è positivo, ovvero, per ogni $\xi > -\frac{1}{K}$, $z(\xi)$ è una funzione crescente, in modo che $g(K)$ viene ad essere crescente [2] almeno nell'intervallo $(-\frac{1}{\xi_1}, 0)$ e la (13) è univocamente risolubile in K.

In queste condizioni, pur rimanendo confermata l'unicità della soluzione dell'equazione (13) per $p_1 - p_2 \leq 0$, essa può venire a mancare nel caso opposto. Precisamente, si possono trovare due valori ξ', ξ'', entrambi positivi, tali che $z'(\xi)$ si annulli rispettivamente per $\xi = \frac{\xi'}{K}, \frac{\xi''}{K}$ $(K > 0)$.

Qualche proprietà dello stress

Le (7)″ mettono in evidenza che si deve intendere

$$B' - p < 0 \qquad B - p < 0 \tag{15}$$

per ogni ξ compreso fra ξ_2 e ξ_1; la (9) precisa *che p risulta in ogni caso, una funzione crescente di ξ.*

---

[2] Si ha evidentemente $g'(k) = z(\xi_1) - z(\xi_2) > 0$.

Accanto alle (10) si ha poi

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
B - B' &= -K\xi(2 + K\xi)(1 + K\xi)^{-\frac{2}{3}}(c_1 + c_2(1 + K\xi)^{-\frac{2}{3}}) \\
\frac{dB'}{d\xi} &= \frac{2}{3}K(1 + K\xi)^{-\frac{5}{3}}(2 + K\xi)(c_1 + c_2(1 + K\xi)^{-\frac{2}{3}}) \\
\frac{dB}{d\xi} &= -\frac{2}{3}K(1 + K\xi)^{-\frac{5}{3}}(c_1(1 + K\xi)(1 + 2K\xi)) \\
&\quad -\frac{2}{3}K(1 + K\xi)^{-\frac{5}{3}}(c_2(1 + K\xi + K^2\xi^2)(1 + K\xi)^{-\frac{2}{3}})
\end{aligned}
$$

con l'intesa di riguardare K come una quantità non positiva, maggiore di $-\dfrac{1}{\xi_1}$.

Occorre distinguere i due casi:

a) $p_1 = p_2$: si deve intendere $K = 0$, $p_0 = p_i + \dfrac{5}{2}c_2 - c_1$ e quindi, per ogni ξ,

$$B' = B = p_i \qquad p = p_i + 2c_1 + c_2 > 0 \, .$$

b) $p_1 - p_2 < 0$, ovvero $-\dfrac{1}{\xi_1} < K < 0$. Accanto alle (15) risulta allora (cfr. $(16)_1$ e $(16)_2$), per ogni ξ, $B > B'$, $\dfrac{dB'}{d\xi} < 0$, il che fa dire, essendo $B'(\xi_1) = p_1$ maggiore di zero, che *le tre quantità B, B' e p non possono che essere positive, in tutto l'intervallo* (ξ_2, ξ_1): *gli sforzi normali sono pressioni anche se* $p_1 = 0$, in perfetto accordo con quanto si può ricavare in base a note proprietà di media [4].

Bibliografia

[1] M. Mooney, *A theory of large elastic deformation*, J. Appl. Phys., 11 (1940), 582-592.

[2] A. Signorini, *Trasformazioni termoelastiche finite I*, Ann. Mat. Pura Appl. 22 (1943), 39-143.

[3] A. Signorini, *Trasformazioni termoelastiche finite II*, Ann. Mat. Pura Appl. 30 (1949), 1-72.

[4] A. Signorini, *Lezioni di fisica matematica*, Veschi, Roma 1952-53.

[5] A. Signorini, *Trasformazioni termoelastiche finite III*, Ann. Mat. Pura Appl. 39 (1955), 147-201.

Summary

We study, in detail, the finite deformations of a spherical and incompressible layer, subject to uniform pressure over interior and exterior surfaces. Assuming the Mooney [1] *isothermal potential, an existence and unicity theorem is proved for the deformation and tension state of the layer, in the sense that such state is univocally determined by the given pressures.*