Riv. Mat. Univ. Parma (5) 4 (1995), 49-60

ANNA RITA SAMBUCINI (*)

Un teorema di Radon-Nikodym in spazi localmente convessi rispetto alla integrazione per seminorme (**)

Introduzione

Teoremi di Radon-Nikodym sono stati forniti da molti autori, nel caso numerabilmente additivo da Z. Artstein [2], F. Hiai [12], J. Ban [3], C. Castaing, A. Touzani, M. Valadier [9] quando l'integrazione utilizzata è quella di Aumann, da D. Gilliam [10], C. Blondia [4] per misure a valori in uno spazio vettoriale topologico E localmente convesso e nel caso finitamente additivo da H. B. Maynard [14], J. W. Hagood [11], D. Candeloro, A. Martellotti [6], [7], A. Martellotti, A. R. Sambucini [16], A. Martellotti, K. Musiał, A. R. Sambucini [17], ed altri.

L'integrazione qui utilizzata è quella per seminorme [18] che è una estensione di quella di Bochner. In questo lavoro è stato ottenuto un teorema di Radon-Nikodym multivoco in assetto finitamente additivo per mezzo di un confronto tra l'esistenza della derivata di Radon-Nikodym e alcune proprietà dei ranghi. Nel Teorema 1 e nel Corollario 1 sono state fornite condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una derivata di Radon-Nikodym limitata. Dalle condizioni fornite, la (4), più forte delle analoghe presenti in [14], [11], [16], introdotta in [4] e sostituita dall'introduzione di uno *strong integral* (S.I) in [10], è necessaria per l'esistenza della derivata di Radon-Nikodym.

Nel caso in cui la derivata di Radon-Nikodym non sia limitata si ottiene solo una condizione necessaria. La condizione sufficiente è attualmente un problema aperto; in ogni caso la proprietà di avere rango medio piccolo localmente esaustivo non sembra sufficiente ad assicurare l'esistenza della derivata se la famiglia delle seminorme è più che numerabile.

Infine si considerano alcuni casi particolari; nel caso in cui lo spazio localmen-

---

(*) Dip. di Matem., Univ. Perugia, Via Pascoli, 06123 Perugia, Italia.
(**) Ricevuto il 6.9.1994. Classificazione AMS 46 G 05. Lavoro eseguito nell'ambito del GNAFA del CNR.

te convesso è di Fréchèt, si ottiene che l'ereditarietà della proprietà di avere rango piccolo è sufficiente per l'esistenza della derivata e nel caso numerabilmente additivo, l'esistenza della derivata implica la proprietà di avere rango medio localmente p-precompatto. Per quanto riguarda le tecniche dimostrative non è stato possibile adottare quelle utilizzate in [4], [5], [10] poiché nel caso finitamente additivo non si hanno lifting.

1 - Preliminari e definizioni

Sia Ω un insieme e Σ una sua σ-algebra. Siano X uno spazio vettoriale localmente convesso e T_2 e Q un insieme filtrante di seminorme continue su X definenti la topologia di X.

Denoteremo con $\mathcal{C}_c(X)$ l'insieme dei non vuoti, chiusi limitati e convessi di X e con Y un sottospazio di $\mathcal{C}_c(X)$ completo. Per ogni $p \in Q$ sia h_p la pseudometrica di Hausdorff associata a p. Un insieme $\mathcal{K}$ contenuto in $\mathcal{C}_c(X)$ si dice limitato se per ogni $p \in Q$ esiste un $r_p > 0$ tale che $\sup_{C \in \mathcal{K}} h_p(C, \{0\}) \leq r_p$.

Definiamo poi, per ogni $p \in Q$, il *p-diametro* dell'insieme $\mathcal{K}$ il numero $\delta_p(\mathcal{C}) = \sup_{C, D \in \mathcal{K}} h_p(C, D) \leq 2 \sup_{C \in \mathcal{K}} h_p(C, \{0\})$.

Sia $M\colon \Sigma \to \mathcal{C}_c(X)$ una multimisura finitamente additiva. Per ogni $p \in Q$ e per ogni $E \in \Sigma$ la *p-variazione* di M su E è definita da:

$$|M|_p(E) = \sup_{(A_i) \in P(A)} \sum_{i \in I} h_p(M(A_i), \{0\})$$

dove $P(A)$ denota la famiglia di tutte le partizioni finite di E costituite da insiemi Σ-misurabili. Si dice che M è b.v. se, per ogni $p \in Q$, $|M|_p(\Omega) < +\infty$.

Siano M, μ due masse con $M\colon \Sigma \to \mathcal{C}_c(X)$, $\mu\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}$ limitata. Diremo che M è *assolutamente continua rispetto a* μ (e scriveremo $M \ll \mu$), se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $p \in Q$ esiste un $\delta(\varepsilon, p) > 0$ tale che, per ogni $E \in \Sigma$ con $|\mu|(E) < \delta$, si ha che $|M|_p(E) < \varepsilon$. M è *scalarmente dominata* da μ, se per ogni $p \in Q$ esiste $K_p > 0$ tale che, per ogni $E \in \Sigma$, $|M|_p(E) \leq K_p\, |\mu|(E)$. M è *subordinata* rispetto a μ se per ogni $p \in Q$ esiste $N_p \in N$ tale che, per ogni $E \in \Sigma$, $M(E) \in N_p \overline{CO}\{\mu(F),\ F \in E\Sigma\}$ dove $\overline{CO}\{\mu(F),\ F \in E\Sigma\} \subset Y$ rappresenta la chiusura delle combinazioni convesse $\sum_{i=1}^{n} C_i \mu(A_i)$ con

$$A_i \subset E\Sigma \qquad C_i \in Y \qquad \sum_{i=1}^{n} h_p(C_i, \{0\}) = 1.$$

In [18] è stato introdotto il concetto di integrabilità per seminorme per una multifunzione $F\colon \Omega \to \mathcal{C}_c(X)$. F è *integrabile per seminorme* o *p-integrabile* se per ogni $p \in Q$ esiste una successione di multifunzioni semplici $(F_n^p)_n$ tale che:

$\boldsymbol{p}_0$. $h_p(F_n^p, F)$ è misurabile per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ e $h_p(F_n^p, F)$ converge a zero in μ-misura

$\boldsymbol{p}_1$. $h_p(F_n^p, F) \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ e per ogni $E \in \Sigma$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E h_p(F_n^p, F)\,d\mu = 0$

$\boldsymbol{p}_2$. per ogni $E \in \Sigma$ esiste ed è unico $x_E \in \mathcal{C}_c(X)$ tale che $\lim\limits_{n\to\infty} h_p(\int\limits_E F_n^p\,d\mu, x_E) = 0$.

In tal caso si pone $x_E = \int\limits_E F\,d\mu$.

Sia $\mu\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}$ una massa limitata e $|\mu|$ la sua variazione. Consideriamo i sottoinsiemi

$$\Sigma^+ = \{E \in \Sigma\colon |\mu|(E) > 0\} \qquad \Sigma^2 = \{E \in \Sigma\colon |\mu|(E) < 2\,|\mu(E)|\}.$$

Con il simbolo $E\Sigma$ indicheremo $E \cap \Sigma$; analogamente $E\Sigma^2$ sta per $E \cap \Sigma^2$. Se μ è limitata ed $E \in \Sigma^+$, allora o $E \in \Sigma^2$ oppure esistono $A, B \in \Sigma^2$ tali che $E = A \cup B$.

Introduciamo ora gli insiemi:

$$A(E\Sigma^2) = \{\frac{M(F)}{\mu(F)}, F \in E\Sigma^2, \mu(F) \neq 0\}$$

$$A_p(E, \varepsilon) = \{C \in Y\colon h_p(M(F), C\mu(F)) \leq \varepsilon\,|\mu|(F) \qquad \forall F \in E\Sigma\}$$

chiamati rispettivamente *rango medio*, e *rango* (p, ε)*-approssimato* di M rispetto a μ.

Fissato $p \in Q$ si dice che una proprietà $\mathbf{P}(p)$ è *μ-esaustiva* su un insieme $E \in \Sigma$ se esiste una esaustione $(E_i)_i \in \Sigma$ di E tale che per ogni i l'insieme E_i gode della proprietà $\mathbf{P}(p)$. In tal caso $(E_i)_i$ si dice una $\mathbf{P}(p)$*-esaustione*. Una proprietà $\mathbf{P}(p)$ è *locale* se per ogni $E \in \Sigma^+$ esiste $H \in E\Sigma^+$ che soddisfa $\mathbf{P}(p)$. Una proprietà $\mathbf{P}(p)$ è *ereditaria* se dati $A, B \in \Sigma^+$ con $B \subseteq A$, se A gode della proprietà $\mathbf{P}(p)$ anche B gode della proprietà $\mathbf{P}(p)$. Osserviamo che la proprietà di avere rango (p, ε)-approssimato non vuoto e di avere rango medio piccolo sono ereditarie. Una proprietà $\mathbf{P}(p)$ si dice *a differenza nulla* se per ogni coppia di insiemi $A, B \in \Sigma^+$ tali che $|\mu|(A \Delta B) = 0$ si verifica uno dei due casi: entrambi godono della proprietà $\mathbf{P}(p)$ oppure nessuno dei due. Se $M \ll \mu$ allora, per ogni $p \in Q$, la proprietà di avere rango (p, ε)-approssimato non vuoto è *a differenza nulla*.

2 - Un teorema di Radon-Nikodym

Proposizione 1 (Principio di esaustione). *Sia* $\mu: \Sigma \to \mathbf{R}$ *una misura finitamente additiva limitata. Fissato* $p \in Q$ *sono equivalenti le due condizioni:*

per ogni $E \in \Sigma^+$ *la proprietà ereditaria* $\mathbf{P}(p)$ *è* μ*-esaustiva su* E

per ogni $\delta > 0$, *esistono* $C(\delta, p) \in \Sigma^+$ *ed* $\alpha(\delta, p) \in]0, 1[$ *tali che:*

$|\mu|(\Omega - C) < \delta$, *per ogni* $E \in C\Sigma^+$ *esiste* $F \in E\Sigma^+$ *tale che* $|\mu|(F) > \alpha\,|\mu|(E)$ *e* F *gode della proprietà* $\mathbf{P}(p)$.

Si dirà allora che la proprietà $\mathbf{P}(p)$ *è localmente esaustiva.*

Dimostrazione. È analoga a quella riportata in [**11**].

Proposizione 2. *Date* $M: \Sigma \to Y$ *e* $\mu: \Sigma \to \mathbf{R}$ *limitate, risultano equivalenti le condizioni:*

(3) *la proprietà di avere rango* (p, ε)*-approssimato non vuoto è localmente esaustiva*

(3′) *la proprietà di avere rango medio piccolo è localmente esaustiva.*

Dimostrazione. È analoga a quella riportata in [**11**].

Proposizione 3. *Siano* $M: \Sigma \to Y$ *e* $\mu: \Sigma \to \mathbf{R}$ *masse limitate. Se per ogni* $E \in \Sigma^+$, $p \in Q$, $\varepsilon > 0$ *la proprietà di avere rango* (p, ε)*-approssimato non vuoto è* μ*-esaustiva su* E *allora esiste una successione generalizzata di partizioni* $\mathcal{P}_n^L = \{E_i^{(L,n)}, i \in \mathbf{N}\}$, *tali che:*

3.1 $\lim_{k \to \infty} |\mu|(\Omega - \bigcup_{i > k} E_i^{(l,n)}) = 0$ *per ogni* $(L, n) \in \mathcal{D}$

3.2 *fissato* $L \subset Q$, L *finito,* $\mathcal{P}_{n+1}^L$ *raffina* $\mathcal{P}_n^L$

3.3 *per ogni* $L \subset Q$, L *finito,* $n, i \in \mathbf{N}$, *si ha che* $A_{p_L}(E_i^{p_L, n}, \frac{1}{2^n}) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Scelto $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, $p \in Q$, sia $(E_i^{p,1})_i$ una esaustione di Ω tale che, per ogni i, $A_p(E^{p,1}, 2^{-1}) \neq \emptyset$ e $\Omega = \bigcup_i E_i^{p,1}$. Il procedimento ora applicato ad Ω si può ripetere per ogni $E_i^{p,1}$, e quindi procedendo ricorsivamente è possibile ottenere una successione di esaustioni $(E_a^{p,n})_a$ in modo che: $A_p(E_a^{p,n}, 2^{-n}) \neq \emptyset$ e

$E_a^{p,n} = \bigcup_i E_{a,i}^{p,n+1}$ e $\Omega = \bigcup E_a^{p,n}$. Fissato allora $L \subset Q$, L finito, sia $p_L = \sum p_i$, $p_i \in L$, e sia $\mathcal{P}_n^L = \{E_i^{p_L,n}\}$.

Ottenuta la successione generalizzata di μ-esaustioni è possibile associarle una successione generalizzata $(G_n^L)_{(L,n)\in\mathcal{Q}}$ di multifunzioni semplici nel seguente modo: poiché per ogni n $(E_a^{p,n})_a$ è una esaustione di Ω, in corrispondenza di $\varepsilon = \frac{1}{n}$ esiste un $k(n)$ tale che $|\mu|(\Omega - \bigcup_{i\leq k(n)} E_i^{p,n}) < \varepsilon$. Definiamo allora

$$G_n^p = \sum_{i\leq k(n)} C_i^{p,n}\cdot 1_{E_i^{p,n}} + \{0\}\cdot 1_{\Omega - \bigcup_{i\leq k(n)} E_i^{p,n}} \qquad C_i^{p,n} \in A_p(E_i^{p,n}, 2^{-n}).$$

In tal modo è possibile costruire una successione $(G_n^p)_n$ di multifunzione semplici e quindi p-integrabili. Porremo allora $G_n^L = G_n^{p_L}$.

Supporremo d'ora in poi che (Ω, Σ, μ) sia *completo* e che $M: \Sigma \to Y$, $\mu: \Sigma \to \boldsymbol{R}$ siano *masse limitate.*

Teorema 1. *Date M e μ sono equivalenti:*

RN$_1$. *esiste $G: \Omega \to Y$ p-integrabile e limitata tale che $\int_E G\,d\mu = M(E)$ per ogni $E \in \Sigma$*

RN$_2$.

(1) $M \ll \mu$

(2) $A(\Omega\Sigma^2)$ *è limitato*

(4) *esiste una successione generalizzata $(\mathcal{P}_n^L)_{(L,n)\in\mathcal{Q}}$ che soddisfa le condizioni* 3.1, 3.2, 3.3 *e tale che la successione generalizzata associata $(G_n^L)_{(L,n)\in\mathcal{Q}}$ converge in μ-misura ad una multifunzione $F: \Omega \to Y$.*

Dimostrazione

RN$_1$ ⇒ RN$_2$. Se G è la derivata di Radon-Nikodym di M rispetto a μ la (1) è ovvia. Inoltre, fissato $p \in Q$, $F \in \Sigma^2$, $r_p = \sup h_p(G, \{0\})$ risulta:

$$h_p\left(\frac{M(F)}{\mu(F)}, \{0\}\right) = h_p\left(\frac{\int_F G\,d\mu}{\mu(F)}, \{0\}\right)$$

$$= \frac{1}{|\mu(F)|}\, h_p\left(\int_F G\,d\mu, \{0\}\right) \leq \frac{1}{|\mu(F)|} \int_F h_p(G, \{0\})\,d|\mu| \leq \frac{r_p\,|\mu|(F)}{|\mu(F)|} \leq 2r_p$$

e quindi $A(\Omega\Sigma^2)$ è limitato.

Poiché G è p-integrabile, sia $(G_n^p)_n$ una successione di multifunzioni semplici definente. Fissati $\varepsilon > 0$ e $p \in Q$ sia $\overline{n}(\varepsilon, p) \in N$ tale che $\int_\Omega h_p(G_{\overline{n}}^p, G)\, \mathrm{d}|\mu| < \varepsilon$. Poiché $G_{\overline{n}}^p$ è una multifunzione semplice risulta $G_{\overline{n}}^p = \sum_{i=1}^{r(\overline{n})} C_i^p 1_{E_i^p}$. La famiglia $\{E_i^p;\, i = 1, \ldots, r(\overline{n})\}$ è una μ-esaustione di Ω che soddisfa la (3): infatti, comunque scelto $E \in \Sigma^+$ risulta $A_p(E \cap E_i^p, \varepsilon) \neq \emptyset$ poiché $C_i^p \in A_p(E \cap E_i^p, \varepsilon)$. Si ha infatti

$$h_p(M(H), C_i^p \mu(H)) = h_p(\int_H G\, \mathrm{d}\mu, \int_H G_{\overline{n}}^p \mathrm{d}\mu) \leqslant \int_H h_p(G, G_{\overline{n}}^p)\, \mathrm{d}|\mu| \leqslant \varepsilon\, |\mu|(H)$$

per ogni $H \in E \cap E_i^p$. Risulta così provata la (3), e quindi, fissati $\varepsilon = 2^{-n}$ ed $L \subset Q$, del passo precedente rimangono definite una multifunzione semplice $G_{\overline{n}}^{p_L}$ ed una μ-esaustione $\{E_i^{p_L};\, i = 1, \ldots, r(\overline{n})\}$, che soddisfa 3.1, 3.2, 3.3.

Resta da provare allora che la successione generalizzata $(G_n^L)_{(L,n) \in \mathcal{O}}$ associata alla successione di μ-esaustioni $\mathcal{P}_n^L = \{E_i^{p_L};\, i = 1, \ldots, r(\overline{n})\}$ converge in μ-misura. Poiché sia $G_{\overline{n}}^{p_l}$ che G_n^L prendono valori negli stessi insiemi $A_{p_L}(E \cap E_i^p, 2^{-n})$, fissati $\varepsilon > 0$, $p \in Q$, esistono $L^* \subset Q$ ed $n^* \in N$ tali che $\mu\{x\colon h_p(G_n^{p_L}, G) > \varepsilon\} < \varepsilon$ e $h_p(G_n^{p_L}, G_n^L) \leqslant \varepsilon$ per ogni $(L, n) \in \mathcal{O}$ con $(L^*, n^*) \preccurlyeq (L, n)$. Pertanto $(G_n^L)_{(L,n) \in \mathcal{O}}$ converge in μ-misura a G.

$\mathbf{RN_2} \Rightarrow \mathbf{RN_1}$. Da (4) e dalla Proposizione 3 rimangono definite una successione di μ-easustioni e una successione di multifunzioni che verifica 3.1, 3.2, 3.3. Sia G il suo limite in μ-misura. Proviamo ora che la successione $(G_n^p)_n$ converge in $|\mu|$-misura a G. Fissati $p \in Q$, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, sia $(\overline{L}, \overline{n}) \in \mathcal{O}$ in modo che $p \in \overline{L}$, $2^{2-\overline{n}} < \dfrac{\alpha}{2}$ e $\mu\{x \in \Omega\colon h_p(G_{\overline{n}}^{\overline{L}}, G) > \dfrac{\alpha}{2}\} \leqslant \varepsilon$. Per ogni $n \geqslant \overline{n}$

$$\mu\{x \in \Omega\colon h_p(G_n^p, G) > \alpha\}$$

$$\leqslant \mu\{x \in \Omega\colon h_p(G_n^p, G_n^{\overline{L}}) > \frac{\alpha}{2}\} + \mu\{x \in \Omega\colon h_p(G, G_n^{\overline{L}}) > \frac{\alpha}{2}\}$$

$$\leqslant \varepsilon + \mu\{x \in \Omega\colon h_p(G_n^p, G_n^{\overline{L}}) > \frac{\alpha}{2}\}$$

$$G_n^p = \sum_{i \leqslant k(n)} C_i^{p,n} \cdot 1_{E_i^{p,n}} + \{0\} \cdot 1_{\Omega - \bigcup_{i \leqslant k(n)} E_i^{p,n}} \qquad G_n^{\overline{L}} = \sum_{i \leqslant l(n)} C_i^{p_{\overline{L}},n} \cdot 1_{E_i^{p_{\overline{L}},n}} \{0\} \cdot 1_{\Omega - \bigcup_{i \leqslant l(n)} E_i^{p_{\overline{L}},n}}.$$

Si consideri la decomposizione $(E_i)_i$ di Ω generata dalle partizioni finite individuate dalle due multifunzioni (eliminando gli insiemi vuoti). Indicata poi con B l'unione di quelli a $|\mu|$-misura nulla, risulta $|\mu|(B) = 0$. Nei rimanenti insiemi, preso

$F \in E_i \Sigma^2$ risulta

$$h_p(G_n^p, G_n^L) = h_p(G_n^p, \frac{M(F)}{\mu(F)}) + h_p(\frac{M(F)}{\mu(F)}, G_n^L) \leqslant 2^{2-n} \leqslant \frac{\alpha}{2}.$$

Dunque G_n^p converge a G in μ-misura.

Infine per ogni $x \in E_i^{p,n}$, $i = 1, \dots, k(n)$, preso $F \in E_i^{p,n}\Sigma^2$ e posto $L_p = \sup_{E \in A(\Omega\Sigma^2)} h_p(\frac{M(E)}{\mu(E)}, \{0\})$, risulta

$$h_p(C_i^{(p,n)}, \{0\}) \leqslant h_p(C_i^{(p,n)}, \frac{M(F)}{\mu(F)}) + h_p(\frac{M(F)}{\mu(F)}, \{0\})$$

$$\leqslant \frac{1}{|\mu(F)|} h_p(M(F), C_i^{(p,n)}\mu(F)) + 2L_p \leqslant \frac{1}{|\mu(F)|} 2^{-n} |\mu|(F) + 2L_p$$

e quindi, per ogni $E \in \Sigma$

$$\int_E h_p(G_n^p, \{0\}) \, d|\mu| = \int_E \sum_{i \leqslant k(n)} h_p(C_i^{(p,n)}, \{0\}) 1_{E^{p,n}{}_i} d|\mu|$$

$$\leqslant \int_E 2(2^{-n} + L_p) \, d|\mu| \leqslant (2 + 2L_p)|\mu|(E).$$

Risultano allora soddisfatte tutte le ipotesi del toerema di Vitali (2.18 di [18]) e quindi G è p-integrabile e c'è passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Resta da provare che G è derivata di Radon-Nikodym. Fissati $\varepsilon > 0$ e $p \in Q$, sia $\delta(\frac{\varepsilon}{3}, p)$ quello della assoluta continuità di M rispetto a μ. Si scelga allora $n \in N$ in modo che risulti $\frac{1}{n} \leqslant \delta$ e $h_p(\int_E G_n^p \, d\mu, \int_E G \, d\mu) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. In corrispondenza di n rimangono definiti $E_1^{p,n}, E_2^{p,n}, \dots, E_{k(n)}^{p,n}$ in modo che $|\mu|(\Omega - \bigcup_{i \leqslant k(n)} E_i^{p,n}) \leqslant \delta$. Risulta allora

$$h_p(M(E), \int_E G \, d\mu) \leqslant h_p(M(E), M(\bigcup_{i \leqslant k(n)} (E \cap E_i^{p,n})))$$

$$+ h_p(M(\bigcup_{i \leqslant k(n)} (E \cap E_i^{p,n})), \sum_{i \leqslant k(n)} C_i^{p,n} \mu(E \cap E_i^{p,n})) + h_p(\int_E G_n^p \, d\mu, \int_E G \, d\mu)$$

$$\leqslant h_p(M(E - \bigcup_{i \leqslant k(n)} (E \cap E_i^{p,n})), \{0\}) + \sum_{i \leqslant k(n)} h_p(M(E \cap E_i^{p,n}), C_i^{p,n} \mu(E \cap E_i^{p,n})) + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + 2^{-n} |\mu|(E).$$

Osservazione 1. Date M e μ, nelle Proposizioni 2.10, 2.11, 2.12 di [18] sono state ottenute le seguenti implicazioni che saranno utilizzate per fornire condizioni equivalenti alla $\mathbf{RN}_1$:

Se è verificata la $\mathbf{RN}_1$ allora M è subordinata rispetto a μ.

Se M è subordinata rispetto a μ, allora M è scalarmente dominata da μ.

Se M è scalarmente dominata da μ, risulta $M \ll \mu$ e $A(\Omega\Sigma^2)$ è limitato.

Corollario 1. *Date M, μ, sono equivalenti le seguenti condizioni:* $\mathbf{RN}_1$, $\mathbf{RN}_2$ *e*

$\mathbf{RN}_3$. *M è subordinata rispetto a μ ed è verificata la* (4)

$\mathbf{RN}_4$. *M è scalarmente dominata da μ ed è verificata la* (4).

Teorema 2 (Radon-Nikodym). *Date M e μ come sopra, se esiste una multifunzione G p-integrabile tale che, per ogni $E \in \Sigma$, $M(E) = \int_E G \, d\mu$, allora risulta:*

$\mathbf{RN}_2'$. $M \ll \mu$

per ogni $p \in Q$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ esistono $C \in \Sigma^+$ ed $\alpha \in]0, 1[$ tali che:

$|\mu|(\Omega - C) < \delta$

$A(C\Sigma^2)$ è limitato

per ogni $E \in C\Sigma^+$ esiste $F \in E\Sigma^+$ tale che $|\mu|(F) > \alpha |\mu|(E)$ e $A_p(F, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Poiché G è p-integrabile sia $(G_n^p)_n$ una sua successione definente. Fissati $\varepsilon > 0$, $p \in Q$, $\delta > 0$, sia $\overline{n}(\varepsilon, p, \delta) \in N$ tale che $|\mu|(x \in \Omega : h_p(G_{\overline{n}}^p, G) < \varepsilon\} < \delta$. Posto $C = \{x \in \Omega : h_p(G_{\overline{n}}^p, G) \leq \varepsilon\}$, risulta $|\mu|(\Omega - C) < \delta$. Se $G_{\overline{n}}^p = \sum_{i \leq k} C_{\overline{n},i}^p 1_{E_{\overline{n},i}^p}$ sia $S_p = \max\{h_p(C_{\overline{n},i}^p, \{0\}) : i = 1, \ldots, k\}$. Per ogni $x \in C$ si ha $h_p(G(x), \{0\}) \leq h_p(G, G_{\overline{n}}^p) + h_p(G_{\overline{n}}^p, \{0\}) \leq \varepsilon + S_p$. Poiché G è limitata in C risulta, per ogni $E \in C\Sigma^2$, $|M|_p(E) = \int_E h_p(G, \{0\} \, d|\mu| \leq (\varepsilon + S_p)|\mu|(E)$. Quindi

$$h_p\left(\frac{M(E)}{\mu(E)}, \{0\}\right) = h_p\left(\frac{\int_E G \, d\mu}{\mu(E)}, \{0\}\right) \leq \frac{1}{|\mu(E)|} h_p\left(\int_E G \, d\mu, \{0\}\right)$$

$$\leq \frac{1}{|\mu(E)|} \int_E h_p(G, \{0\}) \, d|\mu| \leq \frac{(\varepsilon + S_p)|\mu|(E)}{|\mu(E)|} \leq 2(\varepsilon + S_p).$$

Il resto discende immediatamente dal Principio di esaustione e dal Teorema 1 nel caso in cui $\Omega = C$.

Seguendo le notazioni di Maynard [13] diremo che un sottoinsieme A di Y è *ε-limitato*, se per ogni $p \in Q$ esistono $C_1^p, \dots, C_k^p \in Y$ tali che $A \subset \bigcup_{i \leq k} B_p(C_i^p, \varepsilon)$ dove $B_p(C_i, \varepsilon) = \{D \in Y \colon h_p(C_i^p, D) \leq \varepsilon\}$. Un insieme A di Y è *p-precompatto*, se per ogni $\varepsilon > 0$ è ε-limitato rispetto alla seminorma $p \in Q$.

Infine, se $A_1, A_2, \dots, A_n \subset Y$ sia

$$\sigma(A_1, A_2, \dots, A_n) = \{\sum_{i \leq n} a_i C_i,\ a_i \geq 0,\ C_i \in A_i,\ i = 1, \dots, n;\ \sum_{i \leq n} a_i = 1\}.$$

Proposizione 4. *Se* $A_1, A_2, \dots, A_n \subset Y$ *sono ε-limitati allora* $\sigma(A_1, A_2, \dots, A_n)$ *è 2ε-limitato.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella riportata in [13].

3 - Casi particolari

1. Caso numerabilmente additivo

M, μ sono supposte numerabilmente additive, limitate e μ a valori in $\boldsymbol{R}_0^+$.

Proposizione 5. *Date M e μ tali che $M \ll \mu$, se la proprietà di avere rango medio piccolo è localmente esaustiva allora la proprietà di avere rango medio p-precompatto è locale.*

Dimostrazione. Siano $p \in Q$, $E \in \Sigma^+$ fissati. In corrispondenza di $\frac{1}{2}$ sia $(A_i^1)_i$ una μ-esaustione di E tale che $E = \bigcup_i (A_i^1)$ e $\delta_p(A_i^1 \Sigma^2) \leq \frac{1}{2}$. Sia $N_1 \in \boldsymbol{N}$ tale che $\mu(E - \bigcup_{i \leq N_1} A_i^1) \leq \frac{1}{2^2} \mu(E)$. Posto $B_1 = \bigcup_{i \leq N_1} A_i^1$, risulta $B_1 \in \Sigma^+$. Infatti $\mu(E - B_1) = \mu(E) - \mu(B_1) \leq \frac{1}{2^2} \mu(E)$ da cui $\mu(B_1) \geq \mu(E) - \frac{1}{2^2} \mu(E) = \frac{2+1}{2^2} \mu(E)$. In questo modo, procedendo ricorsivamente, a partire da $B_n \in \Sigma^+$ si ottiene una successione $(A_i^{n+1})_i$ tale che $B_n = \bigcup_i A_i^{n+1}$ e $\delta_p(A(A_i^{n+1} \Sigma^2)) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Sia allora $N_{n+1} \in \boldsymbol{N}$ tale che $\mu(B_n - \bigcup_{i \leq N_{n+1}} A^{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+2}} \mu(E)$.

Sia $H = \bigcap_m B_m$. Risulta $H \in \Sigma^+$. Infatti $\mu(H) \geqslant \frac{1}{2}\mu(E) > 0$. Fissato allora $\varepsilon > 0$, sia $m \in N$ tale che $\frac{1}{2^{m-1}} \leqslant \varepsilon$; risulta $H \subset B_m = \bigcup_{i \leqslant N_m} A_i^m$. Poiché per ogni $i = 1, 2, \ldots, N_m$, si ha $\delta_p(A(A_i^m \Sigma^2)) < \frac{1}{2^m}$, è possibile scegliere $D_i \in A_i^m \Sigma^2$ in modo che, posto $C_i = \frac{M(D_i)}{\mu(D_i)}$, risulti $A(A_i^m \Sigma^2) \subset B_p(C_i, 2^{-m})$ cioè, per ogni $i = 1, 2, \ldots, N_m$, $A(A_i^m \Sigma^2)$ è 2^{-m}-limitato. Preso ora $C \in H\Sigma^2$ risulta

$$\frac{M(C)}{\mu(C)} = \sum_{i \leqslant N_m} \frac{M(C \cap A_i^m)}{\mu(C \cap A_i^m)} \frac{\mu(C \cap A_i^m)}{\mu(C)} = \sum_{i \leqslant N_m} X_i a_i$$

dove $a_i = \dfrac{\mu(C \cap A_i^m)}{\mu(C)}$ e $\sum_{i \leqslant N_m} a_1 = 1$ e $X_i = \dfrac{M(C \cap A_i^m)}{\mu(C \cap A_i^m)} \in A(A_i^m \Sigma^2)$.

Risulta allora $A(H\Sigma^2) \subset A(B_m \Sigma^2) = \sigma(A(A_1^m \Sigma^2), A(A_2^m \Sigma^2), \ldots, A(A_{N_m}^m \Sigma^2))$

e quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esso è ε-limitato e dunque p-precompatto.

Corollario 2. *Date M e μ b.v. se esiste una multifunzione G p-integrabile tale che, per ogni $E \in \Sigma$, $M(E) = \int_E G \,\mathrm{d}\mu$ allora*

RN″$_2$. *$M \ll \mu$ per ogni $E \in \Sigma^+$, $p \in Q$ esiste $F \in E\Sigma^+$ tale che $A(F\Sigma^2)$ è p-precompatto in Y.*

Dimostrazione. Per il Teorema 2 l'esistenza della derivata di Radon-Nikodym implica il verificarsi della condizione **RN**$'_2$. Quindi fissati $p \in Q$ ed una successione di numeri positivi $(\delta_n)_n$ decrescente a zero, esiste un insieme $C_n^p \in \Sigma^+$ tale che G è limitata su C_n^p, $|\mu|(\Omega - C_n^p) < \delta_n$ e $A(C_n^p \Sigma^2)$ è limitato.

Costruiamo a partire da $(C_n^p)_n$ una nuova successione $(C_n'^p)_n$ così fatta: $C_n'^p = C_n^p - \bigcup_{i=1}^{n-1} C_i^p$ eliminando eventualmente quegli insiemi che hanno μ-misura nulla. Questa successione di insiemi è una μ-esaustione di Ω ed inoltre $A(C_j'^p \Sigma^2)$ è limitato per ogni j. Risulta poi $M(C_n'^p \cap H) = \int_H G \,\mathrm{d}\mu$.

Per la condizione necessaria del Teorema 1, applicata a $C_n'^p$ e, per la Proposizione 2, la proprietà di avere rango medio piccolo è esaustiva su ogni elemento di $C_n'^p \Sigma^+$, cioè esiste una esaustione $(E_{n,i}^p)_i$ di $C_n'^p$ i cui elementi hanno diametro piccolo, perciò la famiglia $\{(E_{n,i}^p)_i, n \in N\}$ è una μ-esaustione di Ω e quindi la proprietà di avere rango medio piccolo è esaustiva su tutto Σ^+. L'asserto segue allora immediatamente dalla Proposizione 5.

2. X è uno spazio di Fréchèt

In questo caso sia d una distanza che induce la topologia di X. Sia h la distanza di Hausdorff associata a d. In tal caso l'integrabilità per seminorme è equivalente alla μ-integrabilità e quindi il Teorema 2 si può invertire e la $\mathbf{RN}_2'$ diviene condizione necessaria e sufficiente per ottenere una derivata di Radon-Nikodym.

Teorema 3. *Date $M: \Sigma \to Y$ e $\mu: \Sigma \to \mathbf{R}$ masse limitate, sono equivalenti le condizioni:*

$\mathbf{RN}_1'$. *esiste una multifunzione $F: \Omega \to Y$ μ-integrabile tale che, per ogni $E \in \Sigma$, $\int_E F \, d\mu = M(E)$*

$\mathbf{RN}_2'$. $M \ll \mu$

per ogni $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, esistono $C \in \Sigma^+$ ed $\alpha \in]0, 1[$ tali che:

$|\mu|(\Omega - C) < \delta$ *e* $A(C\Sigma^2)$ *è limitato*

per ogni $E \in C\Sigma^+$ esiste $F \in E\Sigma^+$ tale che $|\mu|(F) > \alpha |\mu|(E)$ e $\delta(A(F\Sigma^2)) < \varepsilon$.

Dimostrazione. L'implicazione $\mathbf{RN}_1' \Rightarrow \mathbf{RN}_2'$ è contenuta nel Teorema 2. L'implicazione $\mathbf{RN}_2' \Rightarrow \mathbf{RN}_1'$ è analoga a quella riportata in [**11**].

Bibliografia

[1] R. J. Aumann, *Integrals of set valued functions*, J. Math. Anal. App. **12** (1965), 1-12.

[2] Z. Artstein, *Set valued measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 35-46.

[3] J. Ban, *Radon-Nikodym theorem and conditional expectation of fuzzy-valued measures and variables*, Fuzzy Sets and Systems **34** (1990), 383-392.

[4] C. Blondia, *A Radon-Nikodym theorem for vector valued measures*, Bull. Soc. Math. Belg. **33** (1981), 231-249.

[5] C. Blondia, *On the Radon-Nikodym property in locally convex spaces and the completeness of L_E^1*, Rev. R. Acad. Cienc. Madrid **81** (1987), 635-647.

[6] D. Candeloro and A. Martellotti, *A Radon-Nikodym theorem for finitely additive measures*, Adv. in Math. **93** (1992), 9-24.

[7] D. CANDELORO and A. MARTELLOTTI, *A Radon-Nikodym theorem for vector-valued finitely additive measures with closed range*, Rend. Mat. Appl. **12** (1992), 1071-1086.

[8] G. CASTAING and M. VALADIER, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lecture Notes in Math. **580**, Springer, Berlin 1977.

[9] C. CASTAING, A. TOUZANI et M. VALADIER, *Théorème de Hoffmann-Jorgensen et application aux amarts multivoques*, Ann. Mat. Pura Appl. **146** (1987), 383-397.

[10] D. GILLIAM, *On integration and Radon-Nikodym theorem in quasi-complete locally convex topological vector spaces*, J. Reine Angew. Math. **292** (1977), 125-137.

[11] J. W. HAGOOD, *A Radon-Nikodym theorem and L_p completeness for finitely additive vector measure*, J. Math. Anal. Appl. **113** (1986), 266-279.

[12] F. HIAI, *Radon-Nikodym theorems for set-valued measures*, J. Multivariate Anal. **8** (1978), 96-118.

[13] H. B. MAYNARD, *Radon-Nikodym theorem for operator valued measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **173** (1972), 449-463.

[14] H. B. MAYNARD, *Radon-Nikodym theorem for finitely additive bounded measures*, Pacific J. Math. **33** (1979), 401-413.

[15] A. MARTELLOTTI and A. R. SAMBUCINI, *Radon-Nikodym theorem for a pair of Banach-valued finitely additive measures*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **20** (1988), 331-343.

[16] A. MARTELLOTTI and A. R. SAMBUCINI, *Radon-Nikodym theorem for multimeasures*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **42** (1994), 579-599.

[17] A. MARTELLOTTI, K. MUSIAŁ and A. R. SAMBUCINI, *Radon-Nikodym theorem for the Bartle-Dunford-Schartz integral with respect to finitely additive measures*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **42** (1994), 625-633.

[18] A. R. SAMBUCINI, *Integrazione per seminorme in spazi localmente convessi*, Riv. Mat. Univ. Parma **3** (1994), 371-381.

Summary

We give a Radon-Nikodym theorem for a pair (M, μ) when M is a finitely additive multimeasure and μ is a scalar finitely additive measure. We compare the existence of the Radon-Nikodym density with some properties of the average and (p, ε)-approximated range.

* * *