Riv. Mat. Univ. Parma (5) 5 (1996), 85-89

S. RAJOLA e M. SCAFATI TALLINI (*)

Anelli ternari di Marshall Hall e blocking sets nei piani proiettivi (**)

1 - Anello ternario di Marshall Hall

In questo numero richiamiamo la nozione di anello ternario di Marshall Hall, per rendere più autonoma la trattazione. Precisamente, sia α un piano affine desarguesiano o non. Un riferimento di Marshall Hall consiste in una terna di punti non allineati O, U_1, U_2. La retta $U_1 U_2$ si chiama la retta unitaria.

Sia H l'insieme delle rette parallele alla retta unitaria, che considereremo come insieme di simboli. In H chiameremo 0 = zero la retta per O parallela alla retta $U_1 U_2$ e chiameremo 1 = uno la retta unitaria $U_1 U_2$. Possiamo allora coordinare α su H nel modo seguente. Un punto P di α ha coordinate (a, b) ottenute come segue. Si conduce da P la retta l_1 parallela alla retta OU_2 e si considera il punto $P_1 = OU_1 \cap l_1$. Si considera la retta passante per P_1 e parallela alla retta $U_1 U_2$; tale retta è associata al simbolo a, che è la prima coordinata di P. Si conduce da P la retta l_2 parallela alla retta OU_1 e si considera il punto $P_2 = OU_2 \cap l_2$. Si considera la retta passante per P_2 e parallela alla retta $U_1 U_2$; tale retta ha il simbolo b che è la seconda coordinata di P. Si introduce ora nell'insieme dei simboli H una operazione ternaria, ossia una applicazione $[\ ]: H^3 \Rightarrow H$, definita da $[m, x, a] = y$, dove y è ottenuto nel modo seguente.

Sono individuati i punti di coordinate $(x, 0)$, $(0, a)$, $(1, m)$. Si conduce la retta s passante per $(x, 0)$ e parallela alla retta OU_2. Si conduce la retta t passante per $(0, a)$, e parallela alla retta congiungente i punti $(0, 0)$ e $(1, m)$. Sia $P = s \cap t$. Il simbolo y è la seconda coordinata di P. La coppia $(H, [\ ])$ prende il nome di *anello ternario di Marshall Hall associato ad* $(\alpha, (O, U_1 U_2))$.

(*) Dip. di Matem., Univ. La Sapienza, P.le A. Moro 2, 00185 Roma.

(**) Ricevuto il 28.5.1996. Classificazione AMS 51 E 21.

Ogni retta di α ha equazione $x = v$ (con $v \in H$), se essa è parallela alla retta OU_2, oppure $y = [m, x, a]$, con m ed a fissati e dipendenti unicamente dalla retta. Si prova subito che:

$$[0, x, a] = [m, 0, a] = a \tag{1}$$

$$[m, 1, 0] = m \tag{2}$$

$$[m, x, a] = [m, x, b] \Leftrightarrow a = b . \tag{3}$$

Risulta inoltre:

Proposizione 1. *Due rette $y = [m, x, a]$ ed $y = [m', x, b]$ sono parallele, se e soltanto se $m = m'$.*

Proposizione 2. *Dati (u_1, v_1), $(u_2, v_2) \in H \times H$, con $u_1 \neq u_2$, esistono e sono unici m ed a in H tali che $v_1 = [m, u_1, a]$, $v_2 = [m, u_2, a]$.*

La Proposizione 2 è verificata perché in α per due punti distinti passa una ed una sola retta.

Viceversa, dato un insieme H dotato di due elementi distinti 0, 1 ed una applicazione $[\ ]: H^3 \to H$ soddisfacente le (1), (2), (3), esiste un piano affine α coordinabile su H, nel senso che, se chiamiamo punti gli elementi di H^2, le rette sono gli insiemi $y = [m, x, a]$, dove $m, x, a \in H$ e dove $[\ ]$ è l'applicazione data. Il parallelismo può esprimersi mediante la Proposizione 1; l'esistenza e unicità della retta per due punti distinti sono assicurate richiedendo che sia soddisfatta la Proposizione 2.

Ad un anello ternario $(H, [\ ])$ rimangono associate le seguenti operazioni:

$$m + a = [m, 1, a] \qquad mx = [m, x, 0] .$$

Si dimostra che $(H, +)$ è un quasigruppo con elemento neutro 0, mentre $(H' = H - \{0\}, \cdot)$ è un quasigruppo dotato di unità 1, $(H, \cdot)$ è dotato di annullatore 0. Evidentemente $(H, +, \cdot)$ è un corpo se e soltanto se α è desarguesiano ed allora è $[m, x, a] = mx + a$.

2 - Blocking sets di un piano proiettivo finito che ammettono una tangente

Sia $\pi = \pi_q$ un qualsiasi piano proiettivo finito, desarguesiano o no, di ordine $q \geqslant 3$. Definiamo *blocking set* in π_q un sottoinsieme B tale che ogni retta abbia un punto in comune con B ed un punto in comune con $\pi_q - B$. Ci proponiamo di caratterizzare, facendo uso delle coordinate di Marshall Hall, tutti i blocking sets di π_q che ammettono almeno una tangente.

Sia B uno di tali blocking sets e sia t una retta tangente a B in un punto T. I punti di B si possono considerare distribuiti sulle rette passanti per T e non tangenti a B. Se $n+1$ è il numero di tali rette non tangenti, si ha $n < q$ (se fosse $n = q$, sarebbe $n+1 = q+1$ e dunque non vi sarebbe alcuna tangente a B in T). Siano $l_0, l_1, \dots, l_n$ le $n+1$ rette per T non tangenti a B. Si ha

$$B \subset l_0 \cup l_1 \cup \dots \cup l_n$$

con $|l_i \cap B| \geq 2$, per ogni $i = 0, 1, \dots, n$. Nel piano affine $\alpha = \pi - l_0$ si può sempre fissare un riferimento in modo che l_1 sia l'asse y (onde $T = Y_\infty$). Le rette $l_2, l_3, \dots, l_n$ hanno allora equazioni rispettive $x = v_2$, $x = v_3, \dots, x = v_n$ ($v_i \in H$, H anello ternario di Marshall Hall associato al riferimento fissato). Poniamo:

$$M^* = B \cap l_0 - \{T\} \qquad A^* = B \cap l_1 - \{T\} \qquad C_i^* = B \cap l_i - \{T\} \tag{4}$$

con $i = 2, \dots, n$, $n < q$. Inoltre sia:

$$\begin{gathered} M = \{m \in H \mid l_0 \cap (y = [m, x, 0]) \in M^*\} \\ A = \{a \in H \mid (0, a) \in A^*\} \qquad C_i = \{c_i \in H \mid (v_i, c_i) \in C_i^*\} \end{gathered} \tag{5}$$

con $i = 2, \dots, n$, $n < q$. Risulta

$$1 \leq |M| < |H| = q. \tag{6}$$

Infatti $|M| \geq 1$, in quanto la retta impropria l_0 non è tangente a B; $|M| < |H| = q$, in quanto l_0 non è contenuta in B, essendo B un blocking set. Si ha poi

$$1 \leq |A| < q. \tag{7}$$

Infatti $|A| \geq 1$, in quanto l_1 non è tangente a B e $|A| < q$, in quanto l_1 non è contenuta in B, essendo B un blocking set. Analogamente si stabilisce la relazione

$$1 \leq |C_i| < q. \tag{8}$$

Proposizione 3. *Se* $m \in H - M$, $a \in H - A$, $[m, v_i, a] \in H - C_i$ *con* $i = 2, 3, \dots, n-1$ *ed* $n < q$, *allora* $[m, v_n, a] \in C_n$.

Infatti B è un blocking set nel piano proiettivo $\alpha_q \cup l_0$, dunque la retta $y = [m, x, a]$ con m ed a soddisfacenti la Proposizione 3 deve incidere B in un punto della retta $x = v_n$, altrimenti la retta $y = [m, x, a]$ sarebbe esterna a B.

Viceversa, date in π_q le $n+1$ rette distinte $l_0, l_1, \ldots, l_n$ passanti per un punto T, con $2 \leqslant n < q$, si scelga nel piano affine $\alpha_q = \pi_q - l_0$ un riferimento in modo che l_1 sia la retta OU_2. Sia B un qualsiasi insieme di π_q tale che

$$T \in B \qquad B \subset l_0 \cup l_1 \cup \ldots \cup l_n . \tag{9}$$

Allora, se con le posizioni (4) e (5) si hanno le (6), (7), (8) e sussiste la Proposizione 3, si ha che B è un blocking set, tale che $|l_i \cap B| \geqslant 2$, con $i = 0, \ldots, n$.

Per provare ciò, osserviamo che nessuna retta di π_q può essere contenuta in B. Infatti l_0 non è contenuta in B, perché $|M| < |H| = q$ in forza della (6), l_1 non è contenuta in B in quanto $|A| < q$, per la (7), l_i $(i = 2, \ldots, n)$ non è contenuta in B, perché $|C_i| < q$ per la (8). Inoltre una qualsiasi altra retta distinta dalla retta impropria e non parallela alla retta OU_2 non è contenuta in B, perché i punti di B si possono considerare distribuiti sulle rette $l_0, l_1, \ldots, l_n$ ed è $n < q$, cioè $n + 1 < q + 1$. Inoltre si ha $|l_i \cap B| \geqslant 2$, per $i = 0, \ldots, n$, in quanto $|M| \geqslant 1$ per la (6), $|A| \geqslant 1$ per la (7) e $|C_i| \geqslant 1$ per la (8). Le rette $l_0, \ldots, l_n$ hanno intersezione non vuota con B in quanto $T \in B$, $T \in l_i$ per ogni $= 0, \ldots, n$, e le rimanenti rette non sono esterne a B, perché vale la Proposizione 3.

Si può pertanto concludere con il seguente

Teorema 1. *I blocking sets B di un piano proiettivo π_q, che hanno almeno una tangente, sono caratterizzati come quegli insiemi B che soddisfano le* (6), (7), (8), (9) *e la Proposizione* 3.

3 - Costruzione di blocking sets di un piano proiettivo finito π_q che ammettono una tangente, mediante l'anello ternario di Marshall Hall

Sia $K_0, K_1, \ldots, K_n$ una fissata $(n+1)$-pla di sottoinsiemi propri di H, con $n < q$ e sia $v_2, \ldots, v_n$ una fissata $(n-1)$-pla di elementi di H soddisfacenti la

Condizione 1. *Se $m \in K_0$, $a \in K_1$, $[m, v_i, a] \in K_i$ $(i = 2, \ldots, n-1)$, allora* $[m, v_n, a] \in K_n$.

Sia l_0 una retta di π_q e sia $\alpha_q = \pi_q - l_0$. Nel piano affine α_q si fissi un riferimento di Marshall Hall. Sia l_1 la retta OU_2 e sia l_i la retta di equazione $x = v_i$,

$i = 2, \dots, n$. Si considerino gli *insiemi*:

$$M^* = \{(1, m, 0) \in l_0 \mid m \in H - K_0\} \qquad A^* = \{(0, a) \in l_1 \mid a \in H - K_1\}$$

$$C_n^* = \{(v_n, c_n) \in l_n \mid c_n \in K_n\} \qquad C_i^* = \{(v_i, c_i) \in l_i \mid c_i \in H - K_i\}$$

dove $i = 2, 3, \dots, n-1$.
La terna $(1, m, 0)$ indica il punto improprio della retta $y = [m, x, a]$.

Consideriamo l'*insieme*

$$B = M^* \cup A^* \cup C_2^* \cup \dots \cup C_{n-1}^* \cup C_n^* \cup \{T\}.$$

Per il Teorema 1 e la Condizione 1, B è un blocking set contenuto in $l_0 \cup l_1 \cup \dots \cup l_n$, con $|l_i \cap B| \geq 2$, $i = 0, \dots, n$. Si ha

$$\begin{aligned} |B| &= |M^*| + |A^*| + |C_2^*| + \dots + |C_{n-1}^*| + |C_n^*| + 1 \\ &= q - |K_0| + q - |K_1| + \dots + q - |K_{n-1}| + |K_n| + 1 \end{aligned}$$

quindi: $$|B| = nq - |K_0| - |K_1| - \dots - |K_{n-1}| + |K_n| + 1.$$

Bibliografia

[1] R. C. Bose and K. J. C. Smith, *Ternary rings of a class of linearly representable semi-translation planes*, Atti Convegno Geom. Comb. e sue Appl., Univ. Perugia, Perugia 1971.

[2] M. Hall, *Projective planes*, Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943), 229-277.

[3] L. Lombardo Radice, *Non-desarguesian finite graphic planes*, Appendix of B. Segre, *Lectures on modern geometry*, Cremonese, Roma 1961.

[4] G. Tallini, *On blocking sets in finite projective and affine spaces*, Ann. Discrete Math. 37 (1988), 433-450.

Summary

In this paper, by means of Mashall Hall ternary ring, we characterize all blocking sets of a projective plane π_q *of order* q *having at least a tangent line.*

* * *