Riv. Mat. Univ. Parma (5) 5 (1996), 245-256

G. FERRARESE e L. STAZI (*)

Riferimenti generalizzati in relatività (**)

1 - Caratterizzazione geometrica

Generalmente, per *riferimento* si intende ([1]), cap. IV) un insieme di ∞^3 *particelle ideali* che, nel loro divenire, invadono tutto lo spazio-tempo V_4; esse si muovono liberamente (senza urti o proliferazione), in modo che sia conservata la loro individualità, quindi il *loro numero*. Pertanto, dal punto di vista assoluto, un tale riferimento è caratterizzato da una *congruenza globale* Γ di ∞^3 linee d'universo, orientate e del genere tempo, cioè da un campo di vettori γ unitari e temporali

$$\gamma \cdot \gamma = -1 . \tag{1.1}$$

Dal punto di vista geometrico, Γ introduce, in V_4, una *struttura quasi-prodotto* 1×3, *di tipo ortogonale*, definita localmente da γ: *asse temporale*, e dall'iperpiano Σ ortogonale a γ: *spazio fisico associato al riferimento* (splitting dello spazio-tempo). Si tratta di una struttura che, *sia pure in termini locali*, costituisce, in Relatività generale, l'analogo del riferimento galileiano di cui alla situazione minkowskiana, a parte il carattere globale.

In ogni caso, pur con la variabilità di γ (e quindi della piattaforma Σ normale), un siffatto riferimento sottintende, almeno dal punto di vista cinematico, un *continuo ordinario*, costituito da particelle ideali a simmetria sferica, senza piani o assi privilegiati. Il precedente concetto di riferimento può così essere generalizzato nel senso dei *continui polari*, supponendo che *la distribuzione di iperpiani* $\{\Sigma\}$ (definita da γ nel caso ordinario), *sia indipendente dalle linee orarie del continuo*, come se questo fosse costituito da particelle orientate (*spin*). In questo

(*) Dip. di Matem. G. Castelnuovo, Univ. La Sapienza, P.le A. Moro 2, 00185 Roma.

(**) Ricevuto il 30.12.1996. Classificazione AMS 83 C 05.

senso, supporremo che, insieme alla congruenza temporale Γ, definita dai vettori unitari $\boldsymbol{\gamma}$, *in* V_4 *sia assegnata una distribuzione di 3-piani* $\hat{\Sigma}$ *non ortogonali a* $\boldsymbol{\gamma}$; distribuzione caratterizzata in ogni caso: ellittico, iperbolico o parabolico, da un secondo campo di vettori $\boldsymbol{\eta} \neq \boldsymbol{\gamma}$, definito a meno di un fattore moltiplicativo. L'insieme ordinato dei due campi vettoriali $\boldsymbol{\gamma}$ e $\boldsymbol{\eta}$ introduce in V_4 una *struttura quasi-prodotto* 1×3 *non ortogonale*, che si riduce alla precedente per $\boldsymbol{\eta}$ parallelo a $\boldsymbol{\gamma}$; localmente si ha ancora un *asse temporale* (definito da $\boldsymbol{\gamma}$) e uno *spazio 3-dimensionale* $\hat{\Sigma}$, ma questi è ortogonale a $\boldsymbol{\eta}$ e non a $\boldsymbol{\gamma}$.

Più generalmente, una struttura siffatta è stata introdotta in una *varietà differenziabile*, mediante l'insieme di due campi: uno *contravariante* γ^{α} e l'altro *covariante* η_{α}, definiti ciascuno a meno di un fattore moltiplicativo, con $\gamma^{\alpha}\eta_{\alpha} \neq 0$ [3]. Tuttavia, il caso più frequente è quello metrico; la struttura non ortogonale interviene, ad esempio, nello spazio ordinario, quando si considera l'evoluzione di una *superficie ondosa* e dei *raggi associati*. Analogamente, la *dinamica dei sistemi olonomi* a vincoli dipendenti dal tempo, *tradotta nello spazio degli eventi*, induce quivi una struttura di tipo non ortogonale [2] e [4], definita dalle linee $x^0 = ct =$ var. e dalle varietà V_n: $x^0 =$ cost. Si tratta di due casi particolari, nei quali *la distribuzione* $\{\hat{\Sigma}\}$ è *integrabile*. In una nota successiva, verrà trattato il caso dei *superfluidi*, più significativo dal punto di vista relativistico.

Nel seguito supporremo che V_4 sia *orientata nel tempo* e che gli *iperpiani* $\hat{\Sigma}$ *siano strettamente euclidei*, sì che anche $\boldsymbol{\eta}$, come $\boldsymbol{\gamma}$, è a norma negativa, ed entrambi *appartengono allo stesso semicono luce*: $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\eta} < 0$; pertanto, ai fini della caratterizzazione di $\hat{\Sigma}$, non è restrittivo supporre l'ulteriore condizione

$$\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\eta} = -1\,. \tag{1.2}$$

Si noti che la (1.2) è compatibile con il *caso nullo*: $\eta^2 = 0$, in cui *l'iperpiano* $\hat{\Sigma}$ è *di tipo parabolico*, cioè *tangente al cono luce lungo* $\boldsymbol{\eta}$; di qui la possibilità di utilizzare i riferimenti generalizzati nello studio dei *fasci luminosi: congruenze nulle* [1].

2 - Basi quasi naturali

Come nel caso standard, anche in una V_4 dotata di prodotto 1×3 non ortogonale, ha senso considerare *basi adattate alla struttura*; si tratta di *tetradi* costituite da un vettore collineare a $\boldsymbol{\gamma}$, e da una base di $\hat{\Sigma}$, scelta arbitrariamente. Tra le infinite basi adattate, generalmente anolonome, ci sono quelle speciali, ad esempio *quasi-naturali*; esse sono di *due tipi*, a seconda che si consideri, in $\hat{\Sigma}$, *la base indotta* (per proiezione obliqua) *dalla base naturale* $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}\}$, *ovvero dalla duale* $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}\}$.

In ogni caso, riesce sempre utile (e generalmente non restrittivo) adottare *coordinate interne (o adattate) alla congruenza Γ*: (y^α); esse sono definite a meno di una arbitraria trasformazione del tipo

$$y^{0'} = y^{0'}(y^\alpha) \qquad y^{i'} = y^{i'}(y^1, y^2, y^3) \tag{2.1}$$

ove le funzioni a secondo membro sono subordinate alle sole condizioni che le coordinate siano *equiorientate nello spazio e nel tempo*

$$\frac{\partial y^{0'}}{\partial y^0} > 0 \qquad \det \left\| \frac{\partial y^{i'}}{\partial y^i} \right\| > 0\,. \tag{2.2}$$

In coordinate adattate si deve intendere che $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ e $\boldsymbol{\gamma}$ siano paralleli e concordi, ovvero: $\boldsymbol{\gamma} = \gamma^0 \boldsymbol{\varepsilon}_0$, $(\gamma^0 > 0,\ \gamma^i = 0)$. Ciò implica, essendo $\boldsymbol{\gamma}$ unitario, che le sue componenti covarianti siano del tipo usuale: $\gamma_\alpha = g_{\alpha 0}(-g_{00})^{-\frac{1}{2}}$.

Per semplicità, come nel caso ordinario, sceglieremo in $\hat{\Sigma}$ *basi quasi-naturali*, indotte a partire dai vettori $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ (anziché $\boldsymbol{\varepsilon}^i$); cioè considereremo basi adattate $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_\alpha\}$ del tipo

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_0 = \boldsymbol{\gamma} = \gamma^0 \boldsymbol{\varepsilon}_0 \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i - \frac{\eta_i}{\eta_0} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \in \hat{\Sigma} \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_i = \tilde{\boldsymbol{e}}_i \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{2.3}$$

Esse presuppongono ovviamente la scelta di *coordinate interne* alla congruenza Γ (alle quali fa capo la *base naturale* $\{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha\}$); il carattere di base, sia pure anolonoma, è provato dal fatto che *i vettori* (2.3) *sono linearmente indipendenti*:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_0 \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_1 \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_2 \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \gamma^0 \boldsymbol{\varepsilon}_0 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_1 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_2 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_3 \neq \mathbf{0}\,.$$

Del resto, le relazioni (2.3), del tipo $\tilde{\boldsymbol{e}}_\alpha = \omega_{\tilde{\alpha}}{}^{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$ sono invertibili: $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha = \omega^{\tilde{\alpha}}{}_{\alpha} \tilde{\boldsymbol{e}}_{\alpha}$; invero, tenuto conto delle limitazioni (1.1), (1.2), si hanno i legami

$$\eta_0 = \gamma_0 = -(\gamma^0)^{-1} \tag{2.4}$$

nonché dalla (2.3): $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = -\eta_0 \tilde{\boldsymbol{e}}_0$, $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \hat{\boldsymbol{e}}_i - \eta_i \tilde{\boldsymbol{e}}_0$, e pertanto

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha = \delta^i_\alpha \hat{\boldsymbol{e}}_i - \eta_\alpha \tilde{\boldsymbol{e}}_0 \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3\,. \tag{2.3$'$}$$

Dalla relazione scritta seguono direttamente gli *shifters* $\omega^{\tilde{\alpha}}{}_{\alpha}$

$$\omega^{\tilde{0}}{}_{\alpha} = -\eta_\alpha \qquad \omega^{\tilde{i}}{}_{\alpha} = \delta^i_\alpha\,. \tag{2.5}$$

Gli *elementi reciproci* $\omega_{\tilde{\alpha}}{}^{\alpha}$ sono invece forniti direttamente dalla (2.3)

$$\omega_{\tilde{0}}{}^{\alpha} = \delta^\alpha_0 \gamma^0 \qquad \omega_{\tilde{i}}{}^{\alpha} = \delta^\alpha_i - \frac{\eta_i}{\eta_0} \delta^\alpha_0\,. \tag{2.5$'$}$$

Come nel caso standard, la base $\{\tilde{e}_\alpha\}$ di cui alla (2.3) è di tipo anolonomo, nel senso che non deriva da alcuna specie di coordinate; tuttavia, in un cambiamento delle y^α di tipo interno (2.1), come nel caso ordinario ([5], p. 115), essa si trasforma secondo la legge

$$\tilde{e}_{0'} = \tilde{e}_0 \qquad \hat{e}_{i'} = \frac{\partial y^i}{\partial y^{i'}}\, \hat{e}_i \tag{2.6}$$

come se, *limitatamente a* $\hat{\Sigma}$, *la base* $\{\hat{e}_i\}$ *avesse carattere olonomo*: di qui la denominazione di base *quasi-naturale*.

Nel seguito, indicheremo con

$$\hat{\gamma}_{ik} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_k \tag{2.7}$$

la *metrica indotta* in $\hat{\Sigma}$ e con $\hat{\gamma}^{ik}$ gli *elementi reciproci* di $\hat{\gamma}_{ik}$. Infine, sia $\hat{e}^i \in \hat{\Sigma}$ la *base duale* di $\hat{e}_i$ in $\hat{\Sigma}$, caratterizzata dalle condizioni equivalenti:

$$\hat{e}^i \cdot \hat{e}_k = \delta^i_k \qquad \hat{e}^i = \hat{\gamma}^{ik}\, \hat{e}_k\,.$$

Per quanto riguarda la metrica di V_4, essa è caratterizzata, in termini anolonomi (2.3), dai prodotti $\tilde{g}_{\alpha\beta} = \tilde{e}_\alpha \cdot \tilde{e}_\beta$:

$$\tilde{g}_{00} = -1 \qquad \tilde{g}_{0i} = \tilde{\gamma}_i \qquad \tilde{g}_{ik} = \hat{\gamma}_{ik} \tag{2.8}$$

con

$$\tilde{\gamma}_i = \gamma \cdot \hat{e}_i = \gamma_i - \eta_i\,. \tag{2.9}$$

In termini contravarianti, dato che la (2.5) equivale ai legami $\tilde{e}^0 = -\eta$, $\tilde{e}^i = \varepsilon^i$, si ha direttamente:

$$\tilde{g}^{00} = \|\eta\| \qquad \tilde{g}^{0i} = -\eta^i \qquad \tilde{g}^{ik} = g^{ik}\,. \tag{2.8)'$$

Naturalmente, la metrica contravariante $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ è univocamente determinata dalla (2.8), cioè dai due ingredienti $\hat{\gamma}_{ik}$ (*metrica spaziale*) e $\tilde{\gamma}_i$ (*divario spaziale*). Infatti, le *relazioni di dualità*: $\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\varrho} = \delta^\alpha_\beta$, danno luogo direttamente alle condizioni:

$$\tilde{g}^{0\varrho}\tilde{g}_{k\varrho} = 0 \qquad \tilde{g}^{k\varrho}\tilde{g}_{0\varrho} = 0 \qquad \tilde{g}^{i\varrho}\tilde{g}_{k\varrho} = \delta^i_k \qquad \tilde{g}^{0\varrho}\tilde{g}_{0\varrho} = 1\,.$$

Di qui, esplicitando le somme, e tenendo conto delle (2.8), (2.8)', si ottengono i seguenti legami:

$$\eta^i = \|\eta\|\hat{\gamma}^i \qquad \eta^k = -g^{ik}\tilde{\gamma}_i \qquad -\eta^i\hat{\gamma}^k + g^{ik} = \hat{\gamma}^{ik} \qquad -\|\eta\| = 1 + \eta^i\tilde{\gamma}_i \tag{2.10}$$

avendo posto $\hat{\gamma}^i = \hat{\gamma}^{ik}\tilde{\gamma}_k = \gamma \cdot \hat{e}^i$.

Si noti che $\widehat{e}^i \in \widehat{\Sigma}$ è diverso da $\widetilde{e}^i \notin \widehat{\Sigma}$; più precisamente, a partire dalla decomposizione $\widehat{e}^i = \lambda^i_k\, \widetilde{e}^k + \mu^i\, \boldsymbol{\eta}$, moltiplicando rispettivamente per $\widehat{e}_j$ ed $\boldsymbol{\eta}$, si deduce il legame

$$\widehat{e}^i = \widetilde{e}^i - \frac{\eta^i}{\|\boldsymbol{\eta}\|}\boldsymbol{\eta}\,.$$

In definitiva, la (2.10) dimostra l'equivalenza tra le (2.8) e (2.8)'. Invero, a parte l'identità $(2.10)_2$, le $(2.10)_{1,4}$ forniscono rispettivamente η^i e $\|\boldsymbol{\eta}\| < 0$:

$$\eta^i = \|\boldsymbol{\eta}\|\widehat{\gamma}^i \qquad -\|\boldsymbol{\eta}\| = \frac{1}{1+\gamma^2} < 1$$

essendo γ il *modulo* di $\widehat{\boldsymbol{\gamma}} = \widehat{\gamma}^i\, \widehat{e}_i = \widehat{\gamma}_i\, \widehat{e}^i$, proiezione ortogonale di $\boldsymbol{\gamma}$ su $\widehat{\Sigma}$:

$$\boldsymbol{\gamma} = \widehat{\boldsymbol{\gamma}} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \qquad \gamma^2 = \widehat{\gamma}^i \widehat{\gamma}_i = \widehat{\gamma}_{ik}\widehat{\gamma}^i\widehat{\gamma}^k\,.$$

La $(2.10)_3$ dà invece luogo alla seguente espressione di $\widetilde{g}^{ik} = g^{ik}$:

$$g^{ik} = \widehat{\gamma}^{ik} - \frac{1}{1+\gamma^2}\widehat{\gamma}^i\widehat{\gamma}^k\,.$$

3 - Formule di commutazione e identità di Jacobi

Nel seguito adotteremo sistematicamente, in ogni punto E di V_4, la *base anolonoma* $\{\widetilde{e}_\alpha\}$ di cui alla (2.3), nonché *coordinate interne* alla congruenza di riferimento Γ. Pertanto, in luogo della derivazione ordinaria, interverranno le *derivate pfaffiane* $\widetilde{\partial}_\alpha = \omega_{\widetilde{\alpha}}{}^{\beta}\partial_\beta$:

$$\widetilde{\partial}_0 = \partial = \gamma^0 \frac{\partial}{\partial y^0} \qquad \widetilde{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial y^i} - \frac{\eta_i}{\eta_0}\frac{\partial}{\partial y^0} \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{3.1}$$

Per analogia con il caso ordinario, esse saranno ancora chiamate *derivata temporale* e *spaziale* (in $\widehat{\Sigma}$) rispettivamente; in ogni caso, conformemente alla (2.4), *tali derivate sono costruite con le sole* η_α. Si tratta ovviamente di operatori differenziali che non obbediscono al teorema di Schwarz, cioè *le derivate seconde non sono permutabili:*

$$[\widetilde{\partial}_\alpha, \widetilde{\partial}_\beta]\varphi = \widetilde{A}_{\alpha\beta}{}^{\varrho}\,\widetilde{\partial}_\varrho\varphi \neq 0\,. \tag{3.2}$$

In altri termini, *il tensore di anolonomia* $\widetilde{A}_{\alpha\beta}{}^{\varrho}$ *della distribuzione di basi* (2.3) è *non nullo*. Più precisamente, almeno per le funzioni scalari $\varphi(y)$, valgono le *for-*

Passiamo ora alle derivate spaziali di γ; esse sono necessariamente del tipo

$$\widetilde{\partial}_i \gamma = \widehat{H}_i \gamma + \widehat{H}_i^{\,k} \widehat{e}_k \tag{4.7}$$

ove, come $\widehat{C}$, le $\widehat{H}_i$ sono determinate dalla condizione di ortogonalità $\widetilde{\partial}_i \gamma \cdot \gamma = 0$. Precisamente, si ha $\widehat{H}_i = \widehat{H}_i^{\,k} \widehat{\gamma}_k$.

Analogamente, per quanto riguarda le derivate pfaffiane dei vettori $\widehat{\boldsymbol{e}}_i$, si avranno a priori espressioni della forma:

$$\partial \widehat{\boldsymbol{e}}_i = \widehat{K}_i \gamma + \widehat{K}_i^{\,k} \widehat{\boldsymbol{e}}_k \qquad \widetilde{\partial}_i \widehat{\boldsymbol{e}}_k = \widehat{\mathcal{R}}_{ik} \gamma + \widetilde{\mathcal{R}}_{ik}^{\;\;j} \widehat{\boldsymbol{e}}_j \tag{4.8}$$

dalla quale, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{\eta}$, segue:

$$\widehat{K}_i = \partial \boldsymbol{\eta} \cdot \widehat{\boldsymbol{e}}_i \qquad \widehat{\mathcal{R}}_{ik} = \widetilde{\partial}_i \boldsymbol{\eta} \cdot \widehat{\boldsymbol{e}}_k \,. \tag{4.9}$$

D'altra parte, moltiplicando la (4.8) per γ, e tenendo conto delle $(4.6)_2$ e (4.7), si ricavano le relazioni:

$$\widehat{K}_i = C_i + \widehat{K}_i^{\,j} \widehat{\gamma}_j - \partial \widehat{\gamma}_i \qquad \widehat{\mathcal{R}}_{ik} = H_{ik} - \widetilde{\nabla}_i \widehat{\gamma}_k \tag{4.10}$$

ove si è posto $C_i = \widehat{C}^j \gamma_{ij}$ ed $H_{ik} = \widehat{H}_i^{\,j} \gamma_{jk}$.

Interviene qui la *metrica spaziale*

$$\gamma_{ik} = \widehat{\gamma}_{ik} + \widehat{\gamma}_i \widehat{\gamma}_k \tag{4.11}$$

alternativa a $\widehat{\gamma}_{ik}$ *in* $\widehat{\Sigma}$, nonché la *derivazione covariante* $\widetilde{\nabla}_i$ associata alla connessione $\widetilde{\mathcal{R}}_{ik}^{\;\;j}$.

Infine dalle (4.8), moltiplicando scalarmente per $\widehat{\boldsymbol{e}}_h$, tenuto conto della (4.10), si ha rispettivamente:

$$\begin{aligned} \partial \widehat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \widehat{\boldsymbol{e}}_h &= \widehat{K}_i^{\,j} \gamma_{jh} + (C_i - \partial \widehat{\gamma}_i) \widehat{\gamma}_h \\ \widetilde{\partial}_i \widehat{\boldsymbol{e}}_k \cdot \widehat{\boldsymbol{e}}_h &= \widetilde{\mathcal{R}}_{ik}^{\;\;j} \gamma_{jh} + (H_{ik} - \widetilde{\partial}_i \widehat{\gamma}_k) \widehat{\gamma}_h \,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

D'altra parte, le (4.7) e (4.8) implicano:

$$[\partial, \widetilde{\partial}_i] = (\widehat{K}_i - \widehat{H}_i^{\,k} \widehat{\gamma}_k) \partial + (\widehat{K}_i^{\,k} - \widehat{H}_i^{\,k}) \widetilde{\partial}_k \qquad [\widetilde{\partial}_i, \widetilde{\partial}_k] = 2 \widehat{\mathcal{R}}_{[ik]} \partial + 2 \widetilde{\mathcal{R}}_{[ik]}^{\;\;\;j} \widetilde{\partial}_j \,.$$

Dal confronto con la (3.3), seguono le condizioni:

$$\widehat{K}_i - \widehat{H}_i^{\,k} \widehat{\gamma}_k = \widehat{\mathcal{C}}_i \qquad \widehat{K}_i^{\,k} = \widehat{H}_i^{\,k} \qquad \widehat{\mathcal{R}}_{[ik]} = \widehat{\Omega}_{ik} \qquad \widetilde{\mathcal{R}}_{[ik]}^{\;\;\;j} = 0 \,. \tag{4.13}$$

La $(4.13)_2$ *riduce* K *ad* H e, data la $(4.10)_1$, trasforma la $(4.13)_1$ nel seguente legame

$$\widehat{\mathcal{C}}_i = C_i - \partial \widehat{\gamma}_i \,. \tag{4.14}$$

Esso vale ad esprimere il campo $\widehat{\mathcal{C}}_i$ *in termini di* $\widehat{\gamma}_i$ *e del vettore di curvatura* $\widehat{C}_i$ della congruenza di riferimento Γ.

In definitiva, *tutte le derivate fondamentali* (4.4), (4.7) *e* (4.8) *si esprimono mediante gli ingredienti spaziali* $\hat{\gamma}_i$, $\hat{C}_i$, H_{ik}, $\hat{\gamma}_{ik}$ e $\tilde{\mathcal{R}}_{ik}{}^j$, questi ultimi *simmetrici* rispetto agli indici in basso a norma della $(4.13)_4$. Precisamente risulta:

$$\text{(4.15)}\qquad \begin{aligned} \partial\gamma &= \hat{C}^i \boldsymbol{E}_i & \tilde{\partial}_i\gamma &= \hat{H}_i{}^k \boldsymbol{E}_k \\ \partial\hat{\boldsymbol{e}}_i &= \hat{H}_i{}^k \boldsymbol{E}_k + \hat{C}_i\gamma & \tilde{\partial}_i\hat{\boldsymbol{e}}_k &= \tilde{\mathcal{R}}_{ik}{}^j \boldsymbol{E}_j + (H_{ik} - \tilde{\partial}_i\hat{\gamma}_k)\gamma \end{aligned}$$

dove si è posto $\boldsymbol{E}_i = \hat{\boldsymbol{e}}_i + \hat{\gamma}_i\gamma$. Infine, si noti che i vettori $\boldsymbol{E}_i$ appartengono a Σ.

5 - Significato geometrico-cinematico dei coefficienti $\hat{H}_i{}^k$ e $\tilde{\mathcal{R}}_{ik}{}^j$

Nelle (4.15) rimane ancora da precisare il *significato cinematico dei coefficienti spaziali* $\hat{H}_i{}^k$, *e quello geometrico della connessione spaziale* $\tilde{\mathcal{R}}_{ik}{}^j$. Cominciamo dal primo; moltiplicando la $(4.15)_3$ per $\hat{\boldsymbol{e}}_k$ e simmetrizzando, si ottiene il seguente legame: $\frac{1}{2}\partial\hat{\gamma}_{ik} = H_{(ik)} + (C_{(i} - \partial\hat{\gamma}_{(i})\hat{\gamma}_{k)}$, ove è stata utilizzata la *metrica spaziale* γ_{ik} di cui alla (4.11) e l'espressione (4.14) di $\hat{\mathcal{C}}_i$.

Pertanto, introducendo il *tensore di deformazione* $K_{ik} = \frac{1}{2}\partial\gamma_{ik}$, il precedente legame fornisce la *parte simmetrica* di H_{ik}:

$$\text{(5.1)}\qquad H_{(ik)} = K_{ik} - C_{(i}\hat{\gamma}_{k)}\,.$$

La *parte antisimmetrica* si ricava dalla $(4.10)_2$, tenuto conto delle $(4.13)_{3,4}$:

$$\text{(5.2)}\qquad H_{[ik]} = \hat{\Omega}_{ik} + \tilde{\partial}_{[i}\hat{\gamma}_{k]}\,.$$

In definitiva, si ha la seguente espressione di H:

$$\text{(5.3)}\qquad H_{ik} = K_{ik} + \hat{\Omega}_{ik} - C_{(i}\hat{\gamma}_{k)} + \tilde{\partial}_{[i}\hat{\gamma}_{k]}\,.$$

Essa vale ad esprimere il tensore H_{ik} in termini del vettore $\hat{\gamma}_i$ e dei tre ingredienti fondamentali C_i, K_{ik} e $\hat{\Omega}_{ik}$: *curvatura, deformazione* e *vortice*.

Per quanto riguarda l'interpretazione ordinaria di H_{ik}, essa continua a valere nel caso attuale; *le due parti: simmetrica* k_{ik} *e antisimmetrica* ω_{ik}, riassumono *le velocità di deformazione e angolare proprie del riferimento generalizzato*:

$$\text{(5.4)}\qquad k_{ik} = K_{ik} - C_{(i}\hat{\gamma}_{k)} = \hat{K}_{ik} - \hat{\mathrm{C}}_{(i}\hat{\gamma}_{k)} \qquad \hat{K}_{ik} = \tfrac{1}{2}\partial\hat{\gamma}_{ik} \qquad \omega_{ik} = \hat{\Omega}_{ik} + \tilde{\partial}_{[i}\hat{\gamma}_{k]}\,.$$

Si noti, nella espressione di k_{ik}, l'intreccio tra la deformazione della metrica γ_{ik} e il vettore di curvatura della congruenza Γ; di qui il significato di *deformazione totale*. Idem per ω_{ik}.

Una volta fissato il contenuto cinematico del tensore H_{ik}, resta solo da precisare il signicato geometrico dei coefficienti $\tilde{\mathcal{R}}_{ik}{}^j$, i quali sono simmetrici rispetto agli indici in basso, a norma della $(4.13)_4$. A tal fine, moltiplichiamo scalarmente

(2.6), *hanno tutti carattere invariantivo per trasformazioni interne al riferimento*: cambiamento arbitrario delle coordinate spaziali e del ritmo temporale, per ciascuna particella. In una successiva nota considereremo una prima applicazione dei riferimenti generalizzati.

Bibliografia

[1] M. Castagnino, *Sulle congruenze di curve nulle in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale*, Rend. Mat. Appl. 24 (1965), 174-195.

[2] G. Ferrarese, *Sulle equazioni di moto di un sistema soggetto a un vincolo anolonomo mobile*, Rend Mat. Appl. 22 (1963), 1-20.

[3] G. Ferrarese, *Proprietà di 2° ordine di un generico riferimento fisico in relatività generale*, Rend. Mat. Appl. 24 (1965), 57-100.

[4] G. Ferrarese, *Dinamica riemanniana di un sistema olonomo con struttura interna*, Atti Accad. Lincei Rend. 64 (1978), 466-471 e 584-585.

[5] G. Ferrarese, *Lezioni di relatività generale*, Pitagora, Bologna 1994.

[6] G. Ferrarese e D. Bini, *Riferimenti fluidi polari in relatività generale*, Ricerche Mat., Suppl. 41 (1992), 159-172.

Sommario

We study the main properties of a relativistic frame of reference, *generalized in the polar sense* [6], *and the related non-holonomic techniques, in terms of* non-orthogonal projections: *first order characteristic tensors, Ricci rotation coefficients, longitudinal and transversal covariant derivatives. Thus,* the first order properties of a standard frame of reference, are extended to the non-orthogonal case.

* * *