Riv. Mat. Univ. Parma (5) **6** (1997), 31-34

STEFANIA FERRI (*)

Proprietà grafiche caratterizzanti le quadriche ellittiche di $PG(3, q)$ (**)

Introduzione

Sia K un k-insieme di uno spazio di Galois di dimensione r e di ordine q, $PG(r, q)$, si dice che K è di *classe* $[s, m, n]_1$, rispetto alle rette, $0 \leq s < m < n \leq q+1$, se ogni retta di $PG(r, q)$ può intersecare K solo in s, m, n punti; K è di *tipo* $(s, m, n)_1$, rispetto alle rette, se è di classe $[s, m, n]_1$, ed esistono effettivamente rette di $PG(r, q)$ che intersecano K in s, m, n punti.

Una quadrica ellittica di $PG(3, q)$, q dispari, è un (q^2+1)-insieme di tipo $(0, 1, 2)_1$.

In questo lavoro si dimostra che un k-insieme K di $PG(3, q)$ di classe $[0, m, n]_1$ soddisfacente alcune condizioni è una quadrica ellittica.

1 - Caratterizzazione delle quadriche ellittiche

Sussiste il:

TEOREMA 1. *Un k-insieme K di $PG(3, q)$, q dispari, con $k \leq q^2+1$ di classe $[0, m, n]_1$ e tale che per ogni suo punto passino al più $q+1$ m-secanti K, è una quadrica ellittica.*

(*) Via R. Cappelli 7, 67100 L'Aquila, Italia.

(**) Ricevuto il 20.2.97. Classificazione AMS 51 E 20.

Dimostrazione. Detti t_0, t_m, t_n i *caratteri* di K rispetto alle rette, cioè i numeri delle rette di $PG(3, q)$ che intersecano K rispettivamente in 0, m, n punti, risulta (cfr. [7]):

$$\begin{aligned} t_0 + t_m + t_n &= (q^2 + q + 1)(q^2 + 1) \\ m t_m + n t_n &= k(q^2 + q + 1) \\ m(m-1)\, t_m + n(n-1)\, t_n &= k(k-1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

in cui

$$1 \leqslant m \leqslant q \qquad 2 \leqslant n \leqslant q + 1 . \tag{1.2}$$

Dalla seconda e dalla terza di (1.1) si ricava:

$$\begin{aligned} t_m &= \frac{k[n(q^2 + q + 1) - k - q^2 - q]}{m(n-m)} \\ t_n &= \frac{k[k + q^2 + q - m(q^2 + q + 1)]}{n(n-m)} . \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dovendo essere, per ipotesi, $t_n \geqslant 0$, si ha dalla seconda di (1.3):

$$m(q^2 + q + 1) \leqslant k + q^2 + q \qquad \text{cioè, essendo } k \leqslant q^2 + 1 ,$$

$$m \leqslant \frac{q^2 + 1 + q^2 + q}{q^2 + q + 1} = \frac{2q^2 + q + 1}{q^2 + q + 1} = 2 - \frac{q+1}{q^2 + q + 1} .$$

Ne segue, essendo m intero, $m \leqslant 1$. Ma, per ipotesi $m \geqslant 1$, quindi $m = 1$.

Per $m = 1$ le (1.3) diventano:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{k[n(q^2 + q + 1) - k - q^2 - q]}{n-1} \\ t_n &= \frac{k[k-1]}{n(n-1)} . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Si osservi ora che *per ogni punto P di K passano almeno* $q+1$ *rette m-secanti cioè* 1*-secanti K.*

Infatti, se così non fosse, siano $q+1-a$, con $a>0$, le rette per P unisecanti K. Allora le rette per P n-secanti K sarebbero $q^2+q+1-(q+1-a)=q^2+a$ con $a>0$. Ma allora, poiché i punti di K si distribuiscono sulle rette per P n-secanti K, si avrebbe che $(q^2+a)(n-1)+1=k$. Da cui $n-1=\dfrac{k-1}{q^2+a}$.

Poiché $k \leqslant q^2+1$, ne segue

$$n-1 \leqslant \frac{q^2}{q^2+a} = 1-\frac{a}{q^2+a}.$$

In conclusione $n \leqslant 2-\dfrac{a}{q^2+a}$; quindi, essendo n un numero intero, si avrebbe $n \leqslant 1$ che è assurdo per la (1.2). Segue l'asserto.

Poiché, per ipotesi, per P passano al più $q+1$ 1-secanti, il numero di tali rette sarà $q+1$. Allora il numero t_1 di tutte le rette di $PG(3,q)$ unisecanti K è

$$t_1 = k(q+1). \tag{1.5}$$

Sostituendo la (1.5) nella prima di (1.4) si ha:

$$k[n(q^2+q+1)-k-q^2-q] = k(q+1)(n-1)$$

da cui, essendo $k \neq 0$,

$$k = nq^2 - q^2 + 1 \tag{1.5}$$

da cui $nq^2 = k+q^2-1 \leqslant q^2+1+q^2-1$ cioè $n \leqslant 2$. Ma, per ipotesi, $n \geqslant 2$; dunque $n=2$. Ponendo $n=2$ nella (1.5) si ha $k=q^2+1$. Quindi K è un (q^2+1)-insieme di $PG(3,q)$ di classe $[0,1,2]_1$.

Ma sostituendo $n=2$, $k=q^2+1$, nelle (1.5), (1.4) e nella prima equazione di (1.1) si ottiene

$$t_0 = \frac{q^2(q^2+1)}{2} \qquad t_1 = (q^2+1)(q+1) \qquad t_2 = \frac{q^2(q^2+1)}{2}.$$

Essendo i caratteri di K tutti diversi da zero, K risulta di tipo $(0,1,2)_1$ ed è quindi una (q^2+1)-calotta e, se q è dispari, una quadrica ellittica.

Il Teorema 1 è così provato.

Bibliografia

[1] O. FERRI, *Una caratterizzazione grafica dell'insieme dei punti esterni ad una ovale in un π_q (q dispari)*, Rend. Mat. Appl. **1** (1981), 31-38.

[2] O. FERRI, *On type $((q-3)/2, (q-1)/2, q-1)$ k-sets in a affine plane $AG(2, q)$*, Ann. Discrete Math., 14 (1982), 211-218.

[3] S. FERRI, *Una caratterizzazione delle coniche di $PG(2, q)$*, Ratio Mathematica **11** (1996).

[4] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, Cremonese, Roma 1961.

[5] B. SEGRE, *Istituzioni di Geometria Superiore*, Istituto Mat. Univ. Roma 1966.

[6] G. TALLINI, *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois*, Relazione 30 Istituto Mat. Univ. Napoli (1973).

[7] G. TALLINI, *Teoria dei k-insiemi in uno spazio di Galois, Teoria dei codici correttori*, Sem. Geom. Combinatoria, Quaderno **64**, Dip. Mat. Univ. La Sapienza, Roma (1985).

Summary

We prove that a k-set K of $PG(3, q)$ with $k \leq q^2 + 1$ of class $[0, m, n]_1$ with respect to the lines, such that at the most $q+1$ m-secant lines meet at each point of K, is a (q^2+1)-cap and hence, if q is odd, is an elliptic quadric.

* * *