

N. ALBERTI, M. F. ANDRIANI, M. BEDULLI, S. DALLANOCE
R. FALCADE, S. FOGLIA, S. GREGORI, L. GRUGNETTI
C. MARCHINI, F. MOLINARI, F. PEZZI, A. RIZZA e C. VALENTI (*)

Sulle difficoltà di apprendimento del concetto di limite (**)

In memoria di Francesco Speranza

1 - Introduzione

Come è ben noto, diverse sono le ricerche didattiche incentrate sulle difficoltà di apprendimento del concetto di limite. Ricordiamo qui fra tutte quelle di B. Cornu (1991) e A. Sierpiska (1985, 1987) che hanno dato in modo esemplare l'avvio a questo ricco campo d'indagine.

Dal nostro punto di vista, nell'insieme, che potremmo indicare con R (ricerca globale), delle ricerche (locali) sulle difficoltà di apprendimento di un determinato concetto, vanno distinte le ricerche, che indichiamo con r_i volte ad investigare per cercare di rispondere alla domanda «Perché un concetto è difficile?» dalle ricerche che indichiamo con r_c , volte alla «costruzione didattica» del senso del detto concetto. Di fondamentale importanza sono le interrelazioni tra i due tipi di ricerca.

Ci sembra che la letteratura in materia di difficoltà del concetto di limite offra un quadro incentrato in particolare su ricerche di tipo r_i relative agli aspetti seguenti:

- ostacoli epistemologici (Brousseau 1976, Sierpiska, 1985, etc.)
- difficoltà connesse a scelte didattiche (ex. Furinghetti, Somaglia, 1994; Hauchart, Schneider, 1996).

(*) Unità locale di ricerca didattica, Dipartimento di Matematica, Università di Parma, Via D'Azeglio 85, 43100 Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 14 febbraio 2000. Classificazione AMS 00 A 35, ZDM D 70 - I 20.

La nostra ricerca⁽¹⁾, che ha come obiettivo a lungo termine quello di elaborare un percorso innovativo di situazioni e problematiche atte a favorire la costruzione con gli allievi del concetto di limite, nella sua prima fase si è occupata di indagare su un tipo di difficoltà legata ad aspetti linguistici, che inquadrano nelle ricerche di tipo r_i . Tale indagine ha messo in luce, come vedremo in dettaglio e come del resto era prevedibile, lo stretto legame e le ambiguità, già a livello intuitivo e naïf, dei termini, in linguaggio naturale, «limite» e «infinito».

Nella seconda fase della ricerca facendo nostra l'idea di Fischbein (1973) secondo cui, perché l'insegnamento di un concetto sia produttivo, deve essere preceduto da un'indagine sulle conoscenze intuitive degli allievi inerenti il concetto stesso, ci siamo preoccupati di andare a verificare quali possano essere le intuizioni di allievi di tutte le età su aspetti legati alle idee di infinito, infinitesimo, limite e continuità.

Ci appoggeremo sui risultati delle due fasi della ricerca e su un'analisi critica di tali risultati, nonché sulla letteratura in materia, per dare corpo ad una fase successiva che comincerà a sviluppare una ricerca di tipo r_c .

2 - Ricerca locale sull'idea di limite in rapporto ad aspetti linguistici

Alcune ricerche (exp.; Furinghetti, Paola, 1987; Iacomella, Letizia, Marchini, 1997) hanno evidenziato la presenza di contraddizioni tra il senso matematico e il senso corrente di alcuni termini. Bisogna inoltre tener conto del fatto che l'apprendimento non avviene mai in un contesto socio-culturale neutro. Riguarda delle persone, con una loro storia, che hanno interiorizzato rappresentazioni e atteggiamenti nei riguardi della loro lingua naturale. Lingua che, anch'essa, ha una propria storia rappresentativa della storia del gruppo umano che la parla (Unesco, 1995).

Che cosa troviamo in un dizionario della lingua italiana, ad esempio riguardo al termine «limite»?

Dal Dizionario della lingua italiana Zingarelli:

Limite A s.m. 1. *Confine, barriera: i limiti di un potere, punizione dal limite, nel calcio, quella tirata dalla linea dell'area di rigore, limite di cambio, nelle corse a staffetta, quello che segna il punto in cui si dà il cambio al compagno di gara, (...) 2. Grado ultimo, linea estrema (...).*

⁽¹⁾ Alcuni risultati sono stati presentati ai Convegni Internazionali CIEAEM 50 e CIEAEM 51 (Cfr. bibliografia).

Qui e in numerosi ambiti letterari viene messa in evidenza in particolare l'idea di barriera.

Qual è l'immagine che il termine limite può evocare?

Ad esempio Alessandro Baricco scrive «Un'enciclopedia dei limiti? Sì ... il titolo per esteso sarebbe *Enciclopedia dei limiti riscontrabili in natura con un supplemento dedicato ai limiti delle umane facoltà*. E voi la state scrivendo ... Sì. ... La natura ha una sua perfezione sorprendente e questo è il risultato di una somma di limiti. La natura è perfetta perché non è infinita. Se uno capisce i limiti, capisce come funziona il meccanismo. Tutto sta nel capire i limiti. Prendete i fiumi, per esempio. Un fiume può essere lungo, lunghissimo, ma non può essere infinito. Perché il sistema funzioni, deve finire ...»⁽²⁾.

È questa in genere l'idea che il termine limite evoca anche nei nostri allievi?

2.1 - Un'inchiesta linguistica preliminare

Considerando connessi i termini «limite» e «infinito» sono state elaborate le schede seguenti (organizzate in forma aperta al fine di non influenzare le risposte):

CLASSE	SCUOLA	CLASSE	SCUOLA
Spiega che cosa significa per te il termine «limite»		Spiega che cosa significa per te il termine «infinito»	
Spiega che cosa significano per te le espressioni:		Spiega che cosa significano per te le espressioni:	
«Al limite»		«Un'infinità di volte»	
«Caso limite»		«E così all'infinito»	
«Senza limite»		«Infinitamente»	
«Entro certi limiti»			
Aggiungi, se credi, le tue osservazioni:		Aggiungi, se credi, le tue osservazioni:	

Il campione degli intervistati consta di circa 600 persone fra allievi (dai 14 ai 19 anni) di scuole secondarie superiori di diverso tipo e adulti non matematici (il 10% del totale). Nel caso degli allievi di un Istituto d'Arte, è stato chiesto loro di

⁽²⁾ A. Baricco, *Oceano Mare*, 1993, Rizzoli.

provare ad esprimersi anche in forma grafica. È stata poi estesa questa richiesta anche ad alcuni allievi di classi terze di scuola media.

2.1.1 - Risultati

Vengono riportati qui e analizzati i risultati relativi al questionario sul termine limite.

La forma aperta del questionario ha certamente complicato l'interpretazione delle risposte. Considerando in particolare la prima domanda (che in un certo modo contiene le altre) si è cercato di classificare le risposte «distillando» l'idea principale espressa dall'intervistato:

1. idea di impedimento, di barriera, di regola, di restrizione 44%

Esempi: *Per me il limite è qualcosa che non puoi oltrepassare* (II liceo socio-pedagogico)

Il non poter oltrepassare degli ostacoli ben delimitati (III liceo scientifico)

È un ostacolo o comunque un freno (IV liceo artistico)

2. idea di confine, di chiusura, ... 30%

Esempi: *È qualcosa che ha confine, che è delimitato* (IV liceo socio-pedagogico)

Preso in considerazione un oggetto il limite sarà il confine oltre il quale l'oggetto non esiste più (V liceo scientifico)

Punto o riferimento reale o immaginario che circonda (adulto)

3. idea di estremo, ... 19%

Esempi: *Limite è un punto d'arrivo massimo o minimo* (V liceo scientifico)

Il limite può essere anche molto «lontano» e non essere definito fisicamente o con un numero ... come se fosse qualcosa da scoprire, che non si raggiunge mai ... (V liceo psico-pedagogico)

4. altri significati (fra i quali significati «matematici») 3%

Esempi: *limite = natura umana* (adulto)

Una cosa che è diventata insopportabile (III liceo artistico)

Operazione matematica per lo studio di alcuni punti singolari di funzioni (adulto, poco dopo il conseguimento del diploma di perito industriale)

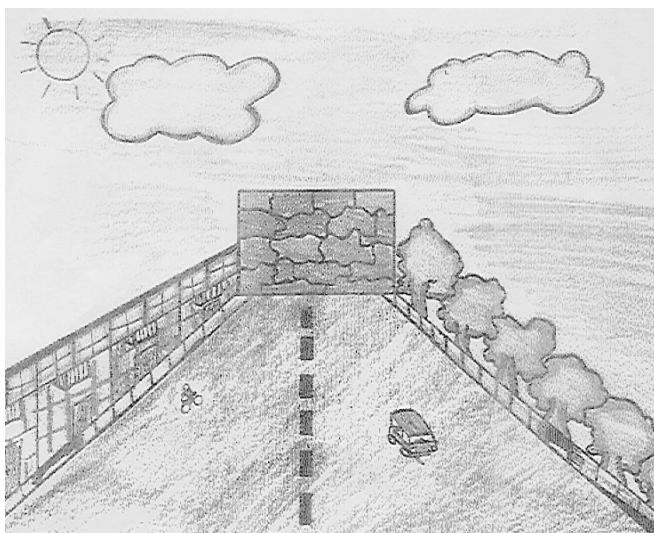
Valore per il quale una funzione data ha un senso, al di fuori del quale la stessa funzione non ha più valori accettabili (V liceo scientifico)

5. nessuna risposta

4%

Gli stessi tipi di «immagini mentali» appaiono nei disegni:

Esempio



Considerando le risposte suddivise per livelli di età (14-17, 18-19, > 19), si può osservare come l'idea di impedimento (sia «fisico» che «morale») sia presente più di frequente nei più giovani e vada diminuendo al crescere dell'età.

È una regola che vieta di andare avanti con una cosa (I liceo artistico)

Una persona o qualunque altra cosa deve avere un limite, cioè deve avere un limite nelle creazioni o in qualunque cosa. Per esempio la clonazione: questa scoperta non doveva essere fatta. Doveva avere un limite (I liceo artistico)

Quali possono dunque essere le influenze possibili delle immagini che tale interpretazione del termine limite evoca sull'apprendimento del concetto matematico?

2.2 - Formulazione di una congettura

La domanda precedente ha dato luogo alla formulazione della congettura secondo la quale «L'idea "forte" di limite come barriera è un ostacolo nel percorso che porta alla comprensione del concetto di limite». È un ostacolo in quanto pensiamo possa dare luogo ad almeno due tipi di difficoltà:

- a) difficoltà a mettere in relazione il limite con un'idea di iterazione (dunque con un processo che continua all'infinito)
- b) difficoltà nell'accettare la possibilità di un limite infinito.

In effetti, la presenza di una sorta di opposizione fra l'idea di limite e di infinito è apparsa con grande frequenza nelle risposte alla domanda «Spiega che cosa significa per te la parola infinito» del secondo *questionario*: *l'infinito è qualcosa che non ha limite*.

2.2.1 - Il caso di successioni

Tenendo conto delle difficoltà preventivate è stata elaborata la scheda (in due versioni) seguente:

<p>CLASSE SCUOLA NOME E COGNOME</p> <p>1. Immagina di continuare la sequenza. Come diventa al limite il perimetro delle figure?</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>2. Immagina di continuare la sequenza. Come diventa al limite il perimetro delle figure?</p> <div style="text-align: center;"> </div>	<p>CLASSE SCUOLA NOME E COGNOME</p> <p>1. Immagina di continuare la sequenza. Come diventerà il perimetro delle figure?</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>2. Immagina di continuare la sequenza. Come diventerà il perimetro delle figure?</p> <div style="text-align: center;"> </div>
---	---

Come si vede, le due formulazioni differiscono per la presenza o meno del termine «limite».

Secondo la nostra analisi a priori può emergere un «conflitto» tra la richiesta di continuare la sequenza e l'espressione *al limite*.

Inoltre, mentre la *questione* n. 1 implica l'idea di limite infinito, nella seconda, la presenza di un «bordo» che «racchiude» tutte le figure dovrebbe facilmente essere associato ad una delle immagini più frequenti di limite, quella di una linea che circonda uno spazio.

La scheda è stata proposta ad un campione di 406 allievi di classi di scuole secondarie superiori di diverso tipo e di terza media. In ogni classe il 50% degli allievi ha avuto la scheda nella prima formulazione e l'altro 50% nella seconda formulazione.

Nella classificazione delle risposte, le risposte corrette (di tipo A) sono state suddivise in due categorie: la prima (A_1) contiene le risposte nelle quali, pur non avendo attribuito un valore al limite, viene stabilito un rapporto esatto tra i termini della successione; la seconda (A_2) contiene le risposte corrette, comprese quelle espresse in maniera poco rigorosa.

Le risposte errate sono state classificate in:

B_1 , risposte nelle quali la costruzione della successione non è stata capita

B_2 , dove ci si ferma al quarto termine

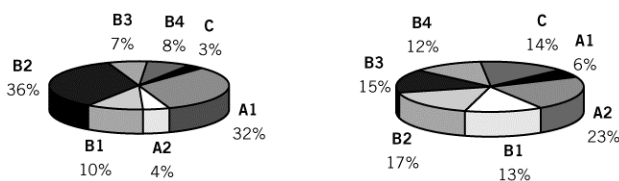
B_3 , risposte nelle quali è stata operata una scelta errata della variabile in gioco (per esempio il numero o la misura dei lati dei poligoni) oppure uno scambio fra variabile dipendente e variabile indipendente

B_4 , risposte che contengono errori diversi dai precedenti.

Con C sono state indicate le non risposte.

È importante mettere in evidenza che in questa classificazione non compare una suddivisione dei risultati relativi alle due diverse formulazioni in quanto questo aspetto è risultato ininfluente: l'uso del futuro «come diventerà» sembra assumere il ruolo di «al limite».

I risultati, qui riassunti,



mostrano che esistono forti resistenze, da un lato, a procedere nell'iterazione (molti allievi si fermano al quarto termine), e, dall'altro, a affermare, nella prima *questione*, che il limite è infinito (benché il 30% degli allievi abbia l'intuizione corretta che la crescita sia infinita). Al contrario, per ciò che riguarda la seconda *questione*, sembra che sia meno difficile dire che *il limite è la circonferenza*, appoggiandosi forse all'immagine di limite come «confine», benché complessivamente i risultati corretti siano in numero minore rispetto alla prima *questione*. Peraltro le risposte corrette sono anche quasi tutte esaustive.

2.2.2 - Alcune osservazioni sulle difficoltà riscontrate

Benché le risposte di tipo B₃, in particolare, mettano bene in evidenza che le difficoltà vanno al di là di quelle attribuibili ad aspetti di tipo linguistico, come, ad esempio, quelle riguardanti le variabili in gioco (e non ultimo il concetto di funzione), l'immagine di barriera e di confine evocata dal termine limite usato nel linguaggio naturale, ci sembra che lasci un segno profondo. Ma non solo, come dice Giovanni Prodi «A proposito di terminologia segnaliamo l'equivoco che può sorgere tra il termine *limite* e il termine *limitazione* (da cui deriva «funzione limitata»). Si tratta di significati assai diversi che, la nomenclatura corrente, in italiano, non distingue sufficientemente» Prodi (1970)⁽³⁾.

Quale può essere il senso da annettere ad una espressione del tipo: « $f(x)$ è una funzione limitata che non ha limite»?

2.2.3 - Problemi legati al limite di una funzione

Le ricerche puntuali di Sierpinska sulle difficoltà del concetto di limite in quanto ostacolo epistemologico riguardano il caso di limiti di successioni. Che cosa succede nel passare dal discreto al continuo? Quali difficoltà permangono, se permangono, nel caso del limite di una funzione?

A circa 200 allievi di ultime classi di scuole secondarie superiori, che avevano già incontrato in classe il concetto di limite, sono stati proposti quesiti riguardanti il limite per x che tende all'infinito di a) una funzione limitata che non ammette limite ($y = \sin x$); b) una funzione non limitata con limite finito ($y = (2x - 7)/(x - 4)$); c) una funzione il cui limite è infinito ($y = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$).

In ogni quesito figura il grafico oltre all'espressione analitica.

I risultati evidenziano come, nel caso dei quesiti b) e c), dove è possibile arrivare a dare la risposta utilizzando solo il registro algebrico, l'80% degli allievi inter-

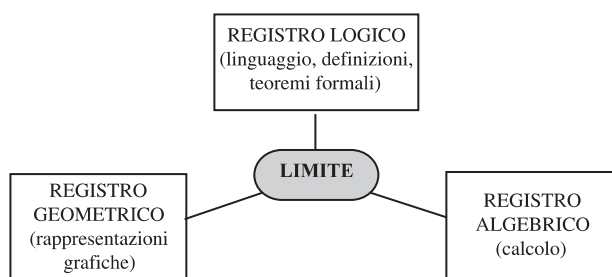
⁽³⁾ G. Prodi, *Analisi matematica*, Boringhieri, 1970, p. 131.

vistati ha dato la risposta corretta ricorrendo al calcolo algebrico, mentre addirittura il 50% di essi non ha dato alcuna risposta al quesito a) in cui era necessario dedurre informazioni unicamente dal grafico.

Lo strumento algebrico sembra venire usato in maniera meccanica: nelle risposte degli allievi non c'è alcun tentativo di mettere in relazione il risultato con il grafico proposto. Il calcolo algebrico diventa la «stampella» sulla quale appoggiarsi per dare la risposta, pur non avendo, in genere, compreso il senso della questione posta.

È questo del resto un aspetto noto. Come mettono in evidenza anche Furinghetti e Somaglia (1994) «Gli studenti sembrano cogliere che il linguaggio grafico ha una sua propria sintassi, più complessa, meno definita e dunque più insidiosa del linguaggio algebrico».

Non va dimenticato che il concetto di limite implica almeno tre registri principali:



Le difficoltà rapportabili al senso annesso, nel linguaggio naturale, al termine limite nella sua connotazione che lo oppone al senso annesso al termine infinito, e quindi le ambiguità che ingenerano, non influenzano l'ambito (o registro) algebrico in quanto in esso tali ambiguità non vengono alla luce.

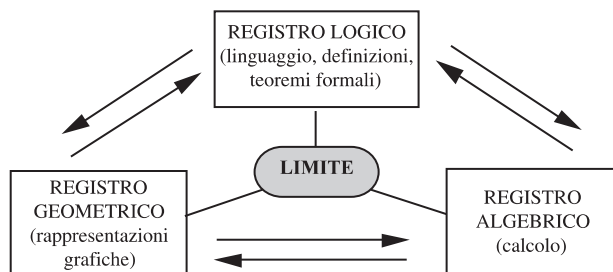
La prassi scolastica, in genere, «si accontenta» di operare nell'ambito del solo registro algebrico senza verificare la reale comprensione e portata delle questioni in esame.

Il percorso didattico è, nella maggior parte dei casi, del tipo seguente:

Si comincia appoggiandosi all'intuizione geometrica degli allievi (non tenendo conto dei livelli di difficoltà del registro geometrico) per arrivare alle definizioni formali e poi alle regole di calcolo (di limiti) alle quali vengono consacrate molte energie e molti esercizi che vanno sotto il nome di «studio di funzioni», ritornando molto raramente ad aspetti teorici. Il punto centrale in questo tipo di attività diventa in effetti l'algoritmo o il sistema di algoritmi che conduce a tracciare il grafico della funzione, correndo il rischio di perdere di vista i problemi concettuali che hanno determinato i calcoli. Peraltro tale tipo di attività può essere considerata obsoleta e soprattutto poco motivan-

te laddove gli allievi possono in tempo reale ottenere i grafici richiesti con strumenti informatici ormai alla portata di tutti.

Pensiamo che la reale comprensione del concetto di limite sia subordinata alla capacità dell'allievo di gestire i tre registri di cui sopra e di spostarsi dall'uno all'altro a seconda dei problemi presi in considerazione.



Il nodo didattico centrale resta quello di come produrre tale capacità.

3 - Una cooperazione cognitiva attraverso i diversi livelli scolari

La risposta dell'insegnamento tradizionale alla complessità degli argomenti connessi al concetto di limite appare insoddisfacente. L'introduzione di questo concetto è confinata agli ultimi anni di scuola secondaria superiore senza alcuna attività preparatoria precedente. Sembra che a scuola si faccia di tutto per tenere nascosto il problema fino al momento di darne una interpretazione formale, senza farlo precedere da una attività di familiarizzazione precoce a livello intuitivo. A partire dalla convinzione che idee di infinito, infinitesimo, continuità, strettamente connesse a quella di limite, possano essere presenti a livello implicito di intuizioni primarie in ogni livello di età, questa fase della ricerca ha come obiettivi, da un lato di riuscire a portare ad un livello esplicito le intuizioni primarie e dall'altro di elaborare strategie per rinforzare tali intuizioni e costruirne di nuove che è possibile indicare come intuizioni secondarie (Fischbein, 1973).

3.1 - La ricerca

Un aspetto centrale di tale ricerca è quello connesso con il tipo di quesiti e la loro formulazione tenendo conto del fatto che andavano proposti ad allievi di età compresa tra i 10 e i 19 anni (nel caso di un quesito dai 6 ai 19 anni) al fine di verificare la presenza di intuizioni e la loro eventuale evoluzione (all'evolvere dell'età) sulle idee di infinito, infinitesimo, continuità.

Sono stati coinvolti nella ricerca circa 300 allievi.

L'elaborazione e la scelta dei quesiti si è basata sulle seguenti ipotesi:

- il medesimo tipo di intuizioni sulle idee di infinito, infinitesimo, continuità, è presente ad ogni livello di età, in modo particolare negli allievi più giovani;
- nel corso del processo scolastico tali intuizioni non solo non evolvono, ma in genere regrediscono.

Sono state elaborate le schede seguenti:

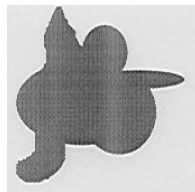
Scheda n. 1

NOME E COGNOME

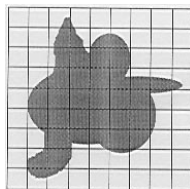
CLASSE

Che bella figura!

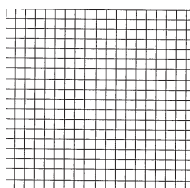
Mario e Giovanni devono trovare l'area di questa figura:



Mario propone di misurare la superficie della figura con carta a quadretti di questo tipo:



Giovanna con carta a quadretti di questo tipo:



E tu che cosa faresti? Hai altre proposte?

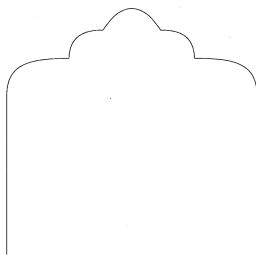
Quanto misura secondo te la superficie della figura? Spiega come l'hai trovata.

Scheda n. 2

NOME E COGNOME
CLASSE

Una sfida

È necessario misurare il contorno di questo portale



Hai a disposizione solo un righello e devi misurare nel modo più preciso possibile.
Come pensi di fare?
Spiega il procedimento che hai scelto.

Scheda n. 3

Consegne per l'insegnante relative alla scheda 3 (cfr. Marchini, 1999):

- Posare un mazzo di carte (ramino) sulla cattedra (parallelepipedo retto)
- Chiedere agli allievi di guardare la faccia «di fronte»
- Dare poi un colpo in modo da inclinare il parallelepipedo che diventa bislungo e chiedere di fare osservazioni.

NOME E COGNOME
CLASSE

Disegna la faccia del mazzo di carte che hai di fronte

PRIMA DOPO

La faccia che vedi è più grande PRIMA o DOPO? Perché?

Scheda n. 4

NOME E COGNOME
CLASSE
● Esistono i triangoli i cui lati hanno le seguenti misure?
a) 7 cm, 9 cm, 5 cm
b) 6 cm, 9 cm, 5 cm
c) 5,5 cm, 9 cm, 5 cm
d) 5 cm, 9 cm, 5 cm
e) 4,5 cm, 9 cm, 5 cm
f) 4 cm, 9 cm, 5 cm
Spiega come hai proceduto e commenta il problema.

Obiettivo delle schede 1 e 2 è stato quello di analizzare l'approccio scelto dall'allievo per confrontarsi con problemi di misura che non possono essere risolti per via elementare.

Obiettivo della scheda 3, scheda che suggerisce una situazione dinamica, è stato quello di verificare la presenza, a livello intuitivo, del principio della conservazione della quantità. Questa scheda è stata proposta ad allievi dai 6 ai 19 anni.

La scheda 4 offre la possibilità, per la struttura degli esercizi successivi, di arrivare al caso limite.

3.2 - I risultati

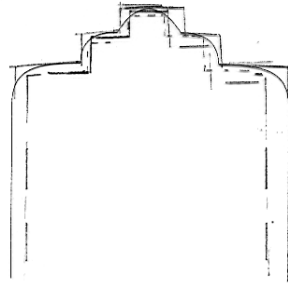
L'analisi degli elaborati evidenzia la presenza di intuizioni primarie sull'idea di infinito a tutti i livelli di età considerati, in particolare nei più giovani. Non appare un'evoluzione degna di nota né in senso quantitativo né in senso qualitativo: laddove c'è l'intuizione questa è sempre connessa all'idea di infinito potenziale.

La prassi didattica, almeno nel caso degli allievi intervistati, non sembra aver fatto evolvere eventuali intuizioni primarie, ma, al contrario, i troppi automatismi innescati sembrano aver prodotto misconcetti.

Per esempio, nei quesiti di cui alle schede 1 e 2, solo gli studenti più giovani sottolineano l'approssimazione del risultato: essi usano espressioni quali *la misura è di circa ...*, *approssimativamente*. Al contrario, gli allievi più anziani danno come soluzione solo un numero.

In particolare, Jacqueline (11 anni) si rende conto che è possibile trovare la

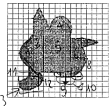
misura del portale disegnando linee esterne e interne per approssimare la misura del portale stesso:



Anche nella situazione del mazzo di carte le idee intuitive (nel senso di intuizioni primarie) sono quelle dei più giovani: Stefano (6 anni) dice alla sua maestra: *sono le stesse perché non è che aggiungi o togli qualche carta.*

Al crescere dell'età, gli allievi, per rispondere ricorrono all'equivalenza delle aree o a formule: il carattere infinitesimale della questione è andato perso.

Esempio



$$\begin{array}{l}
 2,5 \cdot 5 = 12,5 \text{ mm}^2 \{2\} \\
 \frac{17,5 \cdot 7,5}{2} = 66,625 \text{ mm}^2 \{1\} \\
 \frac{5 \cdot 5}{2} = 12,5 \text{ mm}^2 \{3\} \\
 10 \cdot 5 = 50 \text{ mm}^2 \{4\} \\
 12,5 \cdot 20 = 2500 \text{ mm}^2 \{5\} \\
 16 \cdot 5 = 80 \text{ mm}^2 \{6\} \\
 5 \cdot 2,5 = 12,5 \text{ mm}^2 \{3\} \\
 12,5 \text{ mm}^2 \{10\}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \frac{5 \cdot 7,5}{2} = 18,75 \text{ mm}^2 \{3\} \\
 \frac{12,5 \cdot 1}{2} = 6,25 \text{ mm}^2 \{8\} \\
 \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \text{ mm}^2 \{11\} \\
 \frac{7,5 \cdot 1}{2} = 3,75 \text{ mm}^2 \{12\} \\
 10 \cdot 5 = 50 \text{ mm}^2 \{13\} \\
 685,875 \text{ mm}^2 \{14\}
 \end{array}$$

Le difficoltà maggiori incontrate nell'affrontare le situazioni proposte e nel cercare di rispondere ai quesiti sembrano essere originate da convinzioni forti ed errate che sono presenti nella mente di molti allievi (soprattutto fra i più grandi) e che nel tempo diventano una sorta di «teoremi impliciti» o «in atto»:

«Per ogni problema c'è una formula che lo risolve»,

«Ogni problema deve avere un risultato, e possibilmente un numero naturale.»

Il primo tipo di convinzione è particolarmente evidente nei problemi

riguardanti le aree e i triangoli. Gli allievi si appoggiano su formule e teoremi piuttosto che su un ragionamento autonomo.

La seconda convinzione appare in particolare nei problemi sulle curve e sulle aree; gli allievi pensano che sia possibile arrivare alla soluzione con un numero finito di iterazioni o utilizzando conoscenze più «avanzate», come ad esempio il computer.

Un esempio è offerto da un allievo di 17 anni che scrive: *Ho usato il teorema di Pitagora ma sono sicuro che se mi ricordassi il teorema di Euclide avrei risolto meglio*. In questa sua ricerca del «buon teorema» quell'allievo ha perso il senso della questione sollevata dal problema.

Ulteriori fattori concorrono a determinare la negatività dei risultati; tra questi segnaliamo:

- lo stretto e inevitabile legame fra le idee di infinito, infinitesimo e continuità e la conseguente difficoltà di gestirli contemporaneamente
- l'atipicità dei problemi proposti rispetto a quelli abitualmente svolti in classe a causa prevalentemente dei seguenti fattori:
 - la marginalità del calcolo rispetto all'argomentazione
 - la richiesta implicita di immaginare uno sviluppo dinamico della situazione
 - la necessità di approssimazione e di controllo su di essa.

3.3 - Considerazioni sui risultati e conclusioni

Scopo a lungo termine della nostra ricerca è la costruzione di una «mappa concettuale» di attività idonee allo sviluppo delle intuizioni degli allievi nei vari livelli scolastici. Con questo lavoro vorremmo che la nostra ricerca, nata per indagare sulle difficoltà nell'apprendimento del concetto di limite, fornisse anche un contributo per una più efficace costruzione del concetto stesso.

In ordine all'osservazione che sta alla base di questo lavoro circa la presenza di idee intuitive e l'opportunità di coltivarle, abbiamo individuato alcune situazioni particolarmente favorevoli per familiarizzare gradualmente con i concetti di infinito, infinitesimo e continuità. (Si veda: ex. Bagni, 1998; Laganà, 1997; Nordon, 1995; Pellerey, 1997; Prodi, 1992).

Riteniamo anzitutto che il problema della misura (lunghezza di una curva, area di una superficie, volume di un solido) risulti particolarmente adatto a questo scopo per i seguenti motivi:

- offre la possibilità di passare gradualmente da tecniche operative, proponibili già nei primi anni di scuola, a costruzioni teoriche via via più avanzate

- favorisce il collegamento fra ambiti diversi (geometrico e numerico) sfruttando l'intuizione primaria della continuità

- permette di ripercorrere l'effettivo sviluppo storico del calcolo infinitesimale, nel quale notevoli applicazioni hanno preceduto una adeguata sistemazione del contesto teorico. (Friedelmeyer 1992; Grugnetti, Jaquet 1996).

Ci sembra tuttavia che l'insegnamento attuale (almeno in Italia):

- non coltivi sufficientemente la manualità acquisita nella scuola elementare

- si fissi troppo a lungo sulle misure di poligoni e poliedri particolari

- trascuri la tematica dell'approssimazione

- rimandi per troppo tempo il problema generale della misura, fino allo sviluppo del calcolo integrale negli ultimi anni di scuola superiore.

Riteniamo invece che non sia necessario aspettare fino alla trattazione formalizzata del calcolo integrale per dare un'idea intuitiva del problema generale della misura e per sottolineare il fatto che esistono formule solo per pochissimi casi particolari.

Riteniamo inoltre importante non abbandonare l'uso di procedimenti empirici di misura avviati nella scuola elementare e media, ma perfezionarli utilizzando strumenti sempre più avanzati, come ad esempio il computer. Esistono infatti software pensati per favorire (attraverso la visualizzazione e la manipolazione di figure):

- lo sviluppo di immagini mentali che possano sostenere adeguatamente il processo di concettualizzazione

- l'acquisizione del senso e del controllo di un processo piuttosto che di semplici capacità esecutive e tecniche

- una migliore articolazione dei registri numerici, algebrici e grafici grazie al loro funzionamento congiunto.

Riteniamo infine consigliabile far precedere la trattazione del calcolo integrale da esempi di tecniche meno generali ma storicamente rilevanti, che ne hanno costituito le premesse.

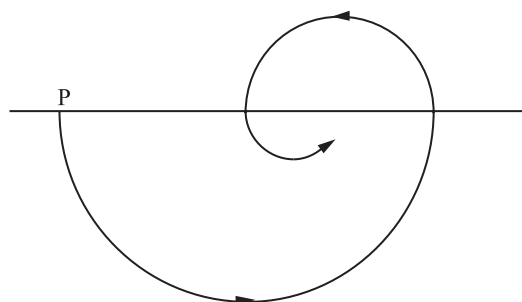
Ci riferiamo in particolare all'area del segmento parabolico seguendo il procedimento di Archimede, all'area dell'ellisse con il metodo degli indivisibili di Cavalieri, al calcolo del volume della sfera dovuto a Luca Valerio e descritto da Galilei. Anche se meno rilevanti dal punto di vista storico riteniamo interessanti anche i problemi seguenti:

- determinare la lunghezza di una spirale formata da semicirconferenze di raggio decrescente:

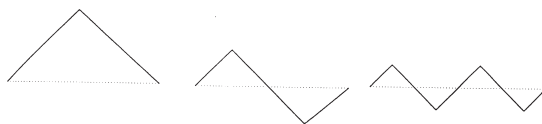
«Dal punto di partenza P si percorre una semicirconfenza di raggio 1, poi si continua su una semicirconfenza di raggio $1/2$ (si veda il disegno). E così di seguito, si percorrono semicirconfenze di raggio che è, ogni volta, la metà del raggio della semicirconfenza precedente.

A quale distanza, sull'asse, dal punto di partenza si potrebbe trovare «l'arrivo»?

Quale sarà la lunghezza del cammino percorrendo le semicirconfenze?»



● determinare la lunghezza limite di una spezzata e l'area limite della regione da essa delimitata



Riteniamo che tutte queste attività contribuiscano a rafforzare l'immaginario degli studenti rendendo più solide ed efficaci le loro rappresentazioni mentali. «Una volta che sia arricchito e consolidato questo terreno di intuizioni e di immagini, allora (solo allora, in modo distinto) può iniziare la fase della formalizzazione, dell'astrazione e della concettualizzazione, della padronanza sintattica» (Impedovo, 1998).

Altre tematiche idonee ad un primo approccio con il concetto di infinito, che non approfondiamo in questa sede, ma che ci sembrano comunque significative sono:

- il problema della divisione per zero e tutte le sue implicazioni (discussione di equazioni, coefficiente angolare di una retta, ecc...)
- la proporzionalità inversa
- il principio di induzione
- le progressioni geometriche

Una sola osservazione circa il primo punto: non condividiamo l'impostazione attuale secondo la quale l'operazione di divisione per zero è presentata per molto tempo come una sorta di divieto scarsamente motivato, per poi venire risolta «banalmente» con un'operazione di passaggio al limite. Occorre a nostro parere abituare fin dall'inizio gli alunni ad una visione dinamica dei problemi «impossibili» mediante successive approssimazioni con problemi «possibili» proponendo, anche se in modo informale, osservazioni del tipo «vediamo cosa succede a dividere un numero per numeri sempre più piccoli...». Tali osservazioni potranno essere estese ad altre questioni (coefficiente angolare di una retta, equazioni di primo grado, intersezione fra rette, asintoti di curve, retta tangente...) favorendo un atteggiamento mentale al quale il concetto di limite apparirà naturale.

Contemporaneamente, a livello metodologico, la nostra riflessione si è incentrata particolarmente sui seguenti nodi problematici, che intendiamo sviluppare nei prossimi anni:

- Rivedere la presentazione dei numeri reali. Molte esperienze (ex. Manara, Marchi, 1993) mostrano che il concetto di numero reale non risulta sufficientemente chiaro agli studenti, e talvolta anche agli stessi insegnanti. La trattazione di questo argomento spesso risulta frettolosa e non supportata da significative applicazioni.

- Abituare gli studenti a lavorare in termini di approssimazione anche sfruttando l'apporto della tecnologia. L'insegnamento dell'analisi dovrebbe fin dall'inizio essere collegata con la problematica dell'approssimazione (Guilbaud, 1979). Anche storicamente il calcolo infinitesimale iniziò il suo sviluppo da un affinamento del pensiero approssimato. Oggi che gli strumenti di calcolo permettono di ottenere in modo banale la soluzione di problemi di routine sembra inopportuno insistere su tecniche sofisticate per la risoluzione di una piccolissima classe di problemi. Appare invece più significativo proporre metodi approssimati che permettano di affrontare una classe più ampia di situazioni e in più offrano allo studente la possibilità di sperimentare direttamente (Impedovo, 1998).

- Proporre problemi significativi. Una larga parte degli esercizi proposti dai libri di testo si riduce all'applicazione di una formula o di una tecnica particolare, alimentando le errate convinzioni degli studenti. Accanto a tali attività, pur necessarie come rinforzo dell'apprendimento, è opportuno proporre problemi più aperti, di cui non sia immediata la traduzione in termini matematici e per i quali sia richiesto più di congetturare ed argomentare che di calcolare. Come esempio di questo tipo di problemi, citiamo da un recente libro belga (CREM, 1995) il seguente: «Con quali quadratini è possibile «quadrettare esattamente» un foglio di formato A4?» Tale problema, infatti, pur prendendo avvio da una

situazione molto familiare, conduce gli studenti a formulare diverse congetture e a verificarle con strumenti sia empirici che teorici, mostrando infine la superiorità dei secondi sui primi.

Tutte le attività a cui abbiamo accennato assolvono a quella che è per noi una necessità imprescindibile, cioè di rafforzare l'immaginario degli studenti e guidare le loro intuizioni in vista di un più proficuo e motivato studio dell'analisi. Sappiamo che si tratta di una posizione condivisa da molti ricercatori; anche in CREM (1995) è scritto, a proposito della definizione di limite, «È interessante costruire l'analisi in termini di oggetti mentali fino al momento in cui ci si accorge che questi non sono più sufficienti e quindi si possono comprendere le ragioni che impongono la formalizzazione».

Bibliografia

- [1] M. F. ANDRIANI, S. DALLANOCE, L. GRUGNETTI, F. MOLINARI et A. RIZZA, *Autour du concept de limite*, in F. Jaquet (ed.) Proceedings of CIEAEM 50, Neuchâtel 2-7 August 1998, 329-335.
- [2] G. T. BAGNI, *L'infinitesimo nelle concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'analisi*, *L'educazione Matematica* 2 (1998), 110-121.
- [3] G. BROUSSEAU, *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, Actes CIEAEM «La problématique et l'enseignement de la mathématique», Louvain-la-Neuve (Belgique), août 1976, 101-117.
- [4] Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, *Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, CREM. La Matematica dalla scuola materna alla maturità, versione italiana a cura di L. Grugnetti e V. Villani con traduzioni e adattamento di S. Gregori, Pitagora editrice, Bologna 1999.
- [5] B. CORNU, *Limits*, in Advanced Mathematical Thinking, D. Tall (ed.), Kluwer Academic Publisher, 1991, 153-166.
- [6] E. FISCHBEIN, *Intuition, structure and heuristic methods in teaching Mathematics* in A. G. Howson (ed.) Developments in Mathematical Education, Cambridge University Press 1973 (Intuizione e struttura dei metodi euristici in matematica, in C. Sitia (ed), Un. Mat. Ital. Quaderno 10 (1979)).
- [7] E. FISCHBEIN, *Intuition in Science and Mathematics*, D. Reidel Publishing Company, 1987.
- [8] J. -P. FRIEDELMEYER, *Eclairages historiques pour l'enseignement de l'analyse*, Histoire d'infini, Actes du 9ème Colloque Inter-IREM Épistémologie et histoire des mathématiques, 22-23 mai 1992, 353-372.
- [9] F. FURINGHETTI e A. M. SOMAGLIA, *Uno studio longitudinale sulla funzione*, Atti Incontro Nuclei di Ricerca Didattica in Matematica nella Scuola Secondaria Superiore, Siena 1994, 63-73.

- [10] F. FURINGHETTI and D. PAOLA, *Wrong beliefs and misunderstanding about basic concepts of calculus (age 16-19)*, *Compte rendu de la CIEAEM* **39**, Role de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique, Sherbrook 1987, 173-177.
- [11] L. GRUGNETTI and F. JAQUET, *Senior Secondary School practices*, in Bishop A.J. et al. eds. *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [12] L. GRUGNETTI, A. RIZZA, M. BEDULLI, S. FOGLIA et S. GREGORI, *Le concept de limite: Quel rapport avec la langue naturelle?* in F. Jaquet (ed.) *Proceedings of CIEAEM* **50**, Neuchâtel 2-7 August 1998, 313-318.
- [13] G. TH. GUILBAUD, *Matematica ed approssimazione*, in C. Sitia (ed), *Un. Mat. Ital. Quaderno 10* (1979). *Proceedings of the Third International Congress of Mathematical Education (1976)*, [121-133, a cura di M. Athenee H. Kunle, Zentralblatt fr Didaktik der Mathematik (Karlsruhe)].
- [14] C. HAUCHART and M. SCHNEIDER, *Une approche heuristique de l'analyse*, *Repères* **25** (1996), 35-60.
- [15] A. IACOMELLA, A. LETIZIA e C. MARCHINI, *Il progetto europeo sulla dispersione scolastica: un'occasione di ricerca didattica. Dalla lingua d'uso comune e con il buon senso verso l'idea di connettivo logico e di quantificatore logico*, Galatina 1997.
- [16] M. IMPEDOVO, *Errori tipici in matematica e inopportunità didattiche*, *Notiziario Un. Mat. Ital.* **XXV**, **10** (1998), 37-54.
- [17] G. A. LAGANÀ, *L'infinito nell'intuizione matematica*, *Notiziario Un. Mat. Ital.* **XXIV**, **7** (1997), 151-156.
- [18] L. LOMBARDO RADICE e L. MANCINI PROIA, *Il metodo matematico*, Principato, 1979.
- [19] C. F. MANARA e M. MARCHI, *L'insegnamento della matematica nei primi due anni della scuola secondaria superiore*, Editrice La Scuola, 1993.
- [20] C. MARCHINI, *Il problema dell'area* *L'Educazione Matematica* **XX** (VI) **1** (1999), 27-48.
- [21] N. NORDON, *Le continu quand il n'était qu'attribut*, in *Actes de la 6e Université d'été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques*, Besançon, 8-13 juillet 1995, 127-151.
- [22] M. PELLEREY, *Continuità e discontinuità nello sviluppo degli atteggiamenti e delle conoscenze e competenze in ambito matematico*, *Notiziario Un. Mat. Ital.* **XXIV**, **17** (1997), 9-20.
- [23] G. PRODI, *Ancora a proposito dell'infinito*, *Lettera Pristem* **5** (1992), 19.
- [24] A. SIERPINSKA, *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite*, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **6** (1) (1985), 5-67.
- [25] A. SIERPINSKA, *Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits*, *Educational studies in Mathematics* **18** (4) (1987), 371-397.
- [26] UNESCO, *Stéréotypes culturels et apprentissage des langues*, 1995.

Summary

Our work team has been carrying on, since some years, a research about difficulties being related to the learning of the concept of limit. During CIEAEM 50 (1998) a communication and a workshop (Grugnetti, Rizza et al. and Andriani, Dallanoce et al., 1999) were presented that illustrated the first step of our work: an enquiry that was aimed at answering the question «why?» Among the numerous aspects, more or less well known, that are related to the learning of the concept, our work pointed out the importance of the linguistic aspect. The assumption that natural language affects or even hinders the understanding and the acceptance of the mathematical concept of limit was confirmed. In particular the «strong» idea of limit as barrier and the deriving negative connotation can represent a huge pre-existing obstacle to any didactic action. Such an idea, together with the well known epistemological difficulties, makes the teacher's intervention poorly effective. The examination of carried out enquiries has pointed out that in students the mastery of calculation techniques does not always coincide with an actual understanding of the concept. The answer of traditional teaching to the complexity of issues that are related to the concept of limit appears to be unsatisfactory. As a matter of fact the introduction of such a concept is confined to the last years of high school without any previous proper preparatory work. The teacher actually seems rather concerned with «keeping the problem hidden» until it is formally dealt with than with having students intuitively and gradually familiarising themselves with limit-related concepts such as that of infinity, infinitesimal, and continuity by using the chances that even «elementary» mathematics can offer. Being convinced that these concepts are present at an intuitive level at all ages, our research was aimed on the one hand at making them come out and on the other at looking for strategies to strengthen them.
